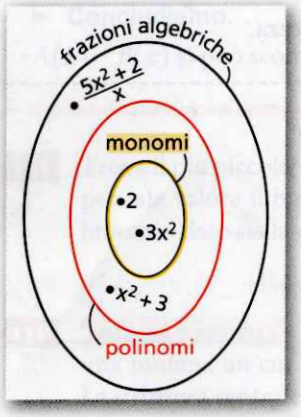
T

CAPITOLO 2

# FRAZIONI ALGEBRICHE. EQUAZIONI FRATTE E LETTERALI. DISEQUAZIONI FRATTE

## 1 Frazioni algebriche




**DEFINIZIONE**

Dati i polinomi $A$ e $B$, con $B$ diverso dal polinomio nullo, la frazione $\frac{A}{B}$ viene detta **frazione algebrica**.

Ogni monomio o polinomio può essere considerato una frazione algebrica il cui denominatore è il monomio 1. Dunque l'insieme delle frazioni algebriche include l'insieme dei polinomi.

**ESEMPIO**

Il polinomio $a^3 + 2$ si identifica con la frazione algebrica $\frac{a^3+2}{1}$.

### Condizioni di esistenza

▶ Esercizi a p. 51

Una frazione algebrica assume valori che dipendono da quelli assegnati alle lettere che vi compaiono, quindi è una funzione rispetto alle variabili contenute nei suoi polinomi. Essa può perdere significato per particolari valori dati alle lettere.
Per esempio, la frazione

$$\frac{x-3}{x-2}$$

non ha significato per $x = 2$, poiché non può avere denominatore nullo.

Una frazione algebrica perde significato per tutti e soli quei valori delle lettere che annullano il denominatore.

Chiamiamo **condizioni di esistenza** di una frazione algebrica tutte le condizioni che le variabili devono verificare affinché il denominatore non sia nullo.

**ESEMPIO**

Determiniamo le condizioni di esistenza (C.E.) della frazione, scomponendo in fattori il denominatore:

$$\frac{x+2}{x^3-9x} = \frac{x+2}{x(x-3)(x+3)}.$$

La frazione perde significato quando $x = 0$, $x = 3$ e $x = -3$, quindi:

C.E.: $x \neq 0 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -3$.

annullamento del prodotto

**Listen to it**

An **algebraic fraction** is the quotient of two polynomials with a non-zero denominator.

▶ Determina le condizioni di esistenza di:

$\frac{2x}{3x-5}$; $\frac{b-x}{b+x}$; $\frac{y-1}{y^2-1}$.

TEORIA

## Frazioni equivalenti

▶ Esercizi a p. 53

Due frazioni algebriche sono **equivalenti** se assumono gli stessi valori numerici quando alle lettere si sostituisce un qualunque valore numerico che soddisfi le condizioni di esistenza di entrambe le frazioni.
Come nelle frazioni numeriche, data una frazione algebrica, si ottiene una frazione equivalente applicando la **proprietà invariantiva**, cioè moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso polinomio (non nullo).

**ESEMPIO**

$$\frac{3x}{2-x} \cdot \frac{3x\cdot(2+x)}{(2-x)\cdot(2+x)} = \frac{6x+3x^2}{4-x^2} \qquad \text{C.E.: } x \neq \pm 2$$

$\frac{3x}{2-x}$ e $\frac{6x+3x^2}{4-x^2}$ sono frazioni equivalenti, se $x \neq \pm 2$.

**Semplificazione**

Molto spesso è utile scrivere una frazione **ridotta ai minimi termini**. Lo facciamo applicando la proprietà invariantiva.
Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore e, dopo aver posto le C.E., dividiamo numeratore e denominatore per i fattori comuni.

**ESEMPIO**

$$\frac{12x+3x^2}{16-x^2} = \frac{3x\cdot(4+x)}{(4-x)(4+x)} = \frac{3x}{4-x} \qquad \text{C.E.: } x \neq 4 \wedge x \neq -4$$

Video

**Frazioni equivalenti e numeri razionali** Che cosa sono le frazioni equivalenti? come possiamo visualizzarle? Vediamo un esempio.

▶ Applicando la proprietà invariantiva, ottieni da $\frac{2a}{a-1}$ tre frazioni equivalenti, indicando le C.E.

▶ Semplifica: $\frac{a^3-a}{a^4-a^3+a^2-a}$.

$\left[\frac{a+1}{a^2+1}\right]$

Animazione

# 2 Operazioni con frazioni algebriche

## Addizione e sottrazione

▶ Esercizi a p. 56

Come per l'addizione e la sottrazione delle frazioni numeriche, bisogna ridurre gli addendi allo stesso denominatore (mcm dei denominatori) e poi sommare i numeratori.

**ESEMPIO**

$$\frac{3}{a+1} - \frac{a}{2a+2} + \frac{1}{a^2+a} =$$ ) scomponiamo in fattori i denominatori

$$\frac{3}{a+1} - \frac{a}{2(a+1)} + \frac{1}{a(a+1)} =$$ ) scriviamo le C.E. e riduciamo allo stesso denominatore: mcm = $2a(a+1)$

C.E.: $a \neq 0 \wedge a \neq -1$

$$\frac{3\cdot 2a}{2a(a+1)} - \frac{a\cdot a}{2a(a+1)} + \frac{1\cdot 2}{2a(a+1)} =$$ ) sommiamo i numeratori

$$\frac{6a-a^2+2}{2a(a+1)}$$

Video

**Addizione e sottrazione di frazioni algebriche** Quali analogie ci sono nei procedimenti di semplificazione di una somma di frazioni e di una somma di frazioni algebriche?

▶ Calcola: $\frac{a+2}{a^2+a} - \frac{2}{a^2-2a} - \frac{3}{a}$.

$\left[\frac{1-2a}{(a+1)(a-2)}\right]$

Animazione

TEORIA

## Moltiplicazione

▶ Esercizi a p. 57

Il risultato della moltiplicazione di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica in cui il numeratore è il prodotto dei numeratori e il denominatore è il prodotto dei denominatori.
Prima di moltiplicare è conveniente cercare di semplificare.

**ESEMPIO**

$$\frac{3y^2}{y^2-4}\cdot\frac{y^2-3y+2}{y^2+y}=$$

) scomponiamo in fattori, scriviamo le C.E. e semplifichiamo

C.E.: $y\neq 0 \wedge y\neq \pm 2 \wedge y\neq -1$

$$\frac{3y^2}{(y-2)(y+2)}\cdot\frac{(y-2)\cdot(y-1)}{y\cdot(y+1)}=$$

) moltiplichiamo

$$\frac{3y}{y+2}\cdot\frac{y-1}{y+1}=\frac{3y^2-3y}{y^2+3y+2}$$

▶ Calcola: $\frac{10a^2}{a^2-2a+1}\cdot\frac{a^2-1}{4a^2-1}\cdot\frac{2a^2-a-1}{2a^2+2a}$. $\left[\frac{5a}{2a-1}\right]$

Animazione

**Listen to it**

The **quotient** of two algebraic fractions is the product of the first algebraic fraction times the reciprocal of the second one.

## Divisione

▶ Esercizi a p. 58

Il quoziente di due frazioni algebriche è il prodotto del dividendo per il reciproco del divisore. Quando scriviamo le C.E., dobbiamo ricordare che anche il divisore deve essere diverso da zero (numeratore del divisore diverso da zero).

**ESEMPIO**

$$\frac{2x+6}{3x^2}:\frac{x^2+6x+9}{6x}=$$

) scomponiamo in fattori

$$\frac{2(x+3)}{3x^2}:\frac{(x+3)^2}{6x}=$$

) scriviamo le C.E. e moltiplichiamo per il reciproco del divisore

C.E.: $x\neq 0 \wedge x\neq -3$

$$\frac{2(x+3)}{3x^2}\cdot\frac{6x}{(x+3)^2}=\frac{2}{x}\cdot\frac{2}{x+3}=\frac{4}{x^2+3x}$$

▶ Calcola: $\frac{x^3-2x^2}{1+x^2-2x}:\frac{x^2+x^3-6x}{x^2-1}$. $\left[\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+3)}\right]$

Animazione

## Potenza

▶ Esercizi a p. 60

La potenza di una frazione algebrica si ottiene elevando a potenza numeratore e denominatore della frazione.

**ESEMPIO**

$$\left(\frac{a^3}{b}\right)^2=\frac{(a^3)^2}{b^2}=\frac{a^6}{b^2} \quad \text{C.E.: } b\neq 0$$

▶ Calcola: $\left(\frac{2}{a^2-4a+4}+\frac{4}{a^3-6a^2+12a-8}\right)^{-3}:\frac{(a^2-4a+4)^2}{a^3}$. $\left[\frac{(a-2)^5}{8}\right]$

Animazione

TEORIA

# 3 Equazioni numeriche fratte

▶ Esercizi a p. 64

Un'equazione numerica è **fratta** se l'incognita compare in almeno un denominatore.

**ESEMPIO**

$\frac{3}{x}+\frac{5}{2}=0$ ——— è un'equazione fratta

$\frac{3x}{2}+\frac{5}{3}=0$ ——— **non** è un'equazione fratta

Per risolvere un'equazione numerica fratta dobbiamo:

- determinare le C.E. delle frazioni algebriche presenti nell'equazione;
- applicare i princìpi di equivalenza per trovare le soluzioni;
- controllare che le soluzioni siano accettabili, cioè che soddisfino le C.E., e in caso contrario scartarle.

Le equazioni numeriche fratte possono essere determinate, indeterminate (cioè con infinite soluzioni, tenendo conto delle C.E.) o impossibili.

**ESEMPIO**

Risolviamo la seguente equazione.

$$\frac{x}{4x+8}-\frac{1}{4}=\frac{3x+1}{x^2-x-6}$$

Scomponiamo in fattori i denominatori.

$$\frac{x}{4(x+2)}-\frac{1}{4}=\frac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$$

Scriviamo le C.E.: $x\neq -2$, $x\neq 3$.

Riduciamo allo stesso denominatore, mcm dei denominatori.

$$\frac{x\cdot(x-3)-(x+2)(x-3)}{4(x+2)(x-3)}=\frac{4\cdot(3x+1)}{4(x+2)(x-3)}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $4(x+2)(x-3)$.

$$x\cdot(x-3)-(x+2)(x-3)=4\cdot(3x+1)$$

$$x^2-3x-x^2+x+6=12x+4$$

$$2=14x \quad\rightarrow\quad x=\frac{1}{7}$$

Controllo:

$\frac{1}{7}$ è accettabile perché soddisfa le C.E.

▶ Risolvi: $\frac{1}{2(x+2)}-\frac{2}{(2+x)(2-x)}=\frac{x}{2(2-x)^2}$. [impossibile]

Animazione

**Listen to it**

A **rational equation** is an equation in which the unknown appears in the denominator of *at least* one of the terms.

▶ Risolvi: $\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{x-1}{x(x-2)}$. [impossibile]

Video

# 4 Equazioni letterali

▶ Esercizi a p. 68

Un'equazione si dice **letterale** quando contiene, oltre all'incognita, altre lettere dette **parametri**.
Le soluzioni di un'equazione letterale dipendono dai valori che i parametri assumono, in particolare per certi valori dei parametri l'equazione può risultare impossibile oppure indeterminata.
Quando risolviamo un'equazione letterale, dobbiamo determinare per quali valori dei parametri l'equazione è determinata, indeterminata o impossibile.

Vediamo il procedimento da seguire con un esempio.

**ESEMPIO**
Risolviamo la seguente equazione nell'incognita $x$.

$a^2x - a = x + 1$ ) separiamo i termini che contengono $x$ a sinistra

$a^2x - x = a + 1$ ) raccogliamo $x$

$(a^2 - 1)x = a + 1$ ) scomponiamo $a^2 - 1$ (coefficiente di $x$)

$(a - 1)(a + 1)x = a + 1$

**Discussione**
Studiamo i casi che annullano il coefficiente di $x$ separatamente:

- se $a - 1 = 0$, cioè $a = 1$: $0 \cdot x = 1 + 1$ → equazione impossibile;
- se $a + 1 = 0$, cioè $a = -1$: $0 \cdot x = -1 + 1$ → equazione indeterminata.

Ricaviamo le soluzioni (che dipendono da $a$) negli altri casi, dividendo per il coefficiente di $x$.

Se $a \neq \pm 1$: $x = \dfrac{\cancel{a+1}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \rightarrow x = \dfrac{1}{a-1}$.

In sintesi:

$a = 1$: impossibile; $a = -1$: indeterminata; $a \neq \pm 1$: $x = \dfrac{1}{a-1}$.

Nel caso di equazioni letterali fratte nella discussione bisogna tener conto:

- delle C.E. relative al parametro (se si trova al denominatore);
- delle C.E. relative all'incognita.

▶ Risolvi la seguente equazione nell'incognita $x$.

$50 + a^2x = a(2a + 5x)$

$\left[a = 0$: impossibile; $a = 5$: indeterminata; $a \neq 0 \wedge a \neq 5$: $x = \dfrac{2(a+5)}{a}\right]$

**Animazione**

▶ Calcola:

$\dfrac{2}{a-2} + \dfrac{x-2}{a^2-2a} = \dfrac{ax+4}{a-2}$.

$\left[a = 0 \vee a = 2$: perde significato; $a = 1$: impossibile; $a = -1$: indeterminata: $a \neq -1 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq 2$: $x = \dfrac{2}{1-a}\right]$

**Video**

TEORIA

# 5 Disequazioni fratte

▶ Esercizi a p. 71

Una disequazione è **fratta** se contiene l'incognita in almeno un denominatore.

Per risolverla dobbiamo trasformarla, usando i principi di equivalenza in una delle seguenti forme, dette *forme normali*:

$$\frac{N(x)}{D(x)} > 0, \quad \frac{N(x)}{D(x)} \geq 0, \quad \frac{N(x)}{D(x)} < 0, \quad \frac{N(x)}{D(x)} \leq 0,$$

dove $N(x)$ e $D(x)$ sono funzioni dell'incognita $x$. Studiamo solo il caso in cui le due funzioni sono polinomi (disequazione razionale fratta).

Vediamo il procedimento di risoluzione di una disequazione in forma normale.

**ESEMPIO**

Risolviamo la disequazione

$$\frac{2x+1}{x-3} \leq 0.$$

Per studiare il segno della frazione esaminiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

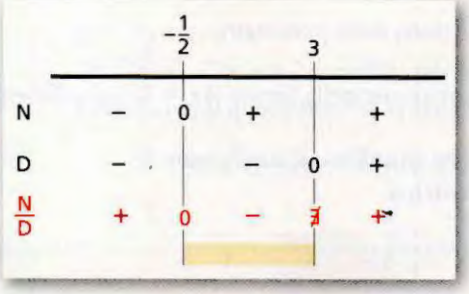
Poniamo sempre $N > 0$ e $D > 0$, indipendentemente dal simbolo $\leq, \geq, >, <$ che compare nella disequazione.

$N > 0$: $2x+1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -\frac{1}{2}$;

$D > 0$: $x-3 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 3$.

Compiliamo il quadro dei segni, dove il segno di $\frac{N}{D}$ si ottiene con la regola dei segni.

Quando $N$ si annulla, anche $\frac{N}{D}$ si annulla, mentre quando si annulla $D$, la frazione non esiste ($\nexists$).




La frazione $\frac{N}{D}$ è minore o uguale a zero, come richiede la disequazione, per

$$-\frac{1}{2} \leq x < 3.$$

**Listen to it**

If the unknown is in the denominator, the inequality is called a **rational inequality**.

▶ Risolvi le seguenti disequazioni:

**a.** $\frac{3-x}{x+5} > 0$;

**b.** $\frac{x^2-4}{x^2+2x} \leq 0$.

[a) $-5 < x < 3$; b) $0 < x \leq 2$]

**Animazione**

# IN SINTESI
# Frazioni algebriche. Equazioni fratte e letterali. Disequazioni fratte

## Frazioni algebriche

Dati i polinomi $A$ e $B$, con $B$ diverso dal polinomio nullo, la frazione $\frac{A}{B}$ è detta **frazione algebrica**.

- Le condizioni di esistenza (C.E.) di una frazione algebrica sono le condizioni che imponiamo sulle variabili affinché il denominatore sia diverso da zero.

ESEMPIO: $\frac{2x}{x-3}$ C.E.: $x \neq 3$; $\frac{5y}{a^2x}$ C.E.: $a \neq 0 \wedge x \neq 0$.

- Due frazioni algebriche sono **equivalenti** se si ottengono una dall'altra moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per lo stesso polinomio non nullo (**proprietà invariantiva**).
- **Semplificare** una frazione algebrica significa ridurla ai minimi termini; per farlo occorre scomporre in fattori numeratore e denominatore e applicare la proprietà invariantiva.

ESEMPIO: $\frac{5a^2y + ay^2}{25a^2 - y^2} = \frac{ay\cancel{(5a+y)}}{\cancel{(5a+y)}(5a-y)} = \frac{ay}{5a-y}$.

- Il procedimento per le **operazioni** con le frazioni algebriche è analogo a quello per le frazioni numeriche.

ESEMPIO: $\frac{3x+6}{4x^3} \cdot \frac{2x^2y}{xy+2y} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{3 \cdot \cancel{(x+2)}}{\cancel{2}\cancel{4}x^{\cancel{3}}} \cdot \frac{\cancel{2}x^{\cancel{2}}\cancel{y}}{\cancel{y}\cancel{(x+2)}} + \frac{4}{x^2} = \frac{3}{2x} + \frac{4}{x^2} = \frac{3x+8}{2x^2}$.

## Equazioni fratte e letterali

- Le **equazioni numeriche fratte** si risolvono:
  - scrivendo le C.E.;
  - applicando i princìpi di equivalenza;
  - controllando che le soluzioni soddisfino le C.E.

  Se una soluzione non soddisfa le C.E., va scartata.
- Le **equazioni letterali** contengono, oltre all'incognita, altre lettere, dette *parametri*.
  Procedimento di risoluzione di un'equazione letterale intera:
  - applichiamo i princìpi di equivalenza fino a ottenere un'equazione nella forma $Ax = B$ (i coefficienti $A$ e $B$ dipendono dal parametro);
  - discutiamo l'equazione a partire dai valori del parametro che annullano il coefficiente $A$;
  - determiniamo la soluzione, che in genere dipende dal parametro.

## Disequazioni fratte

Per risolvere una **disequazione numerica fratta** dobbiamo:

- trasformarla in forma normale: $\frac{N(x)}{D(x)} \gtrless 0$;
- studiare separatamente il segno del numeratore e del denominatore, ponendo $N(x) > 0$ e $D(x) > 0$;
- compilare il quadro dei segni aggiungendo la riga $\frac{N(x)}{D(x)}$ ottenuta con la regola dei segni;
- trovare la soluzione: gli intervalli che hanno il segno richiesto dalla disequazione.

# CAPITOLO 2
# ESERCIZI

## 1 Frazioni algebriche

### Condizioni di esistenza

▶ Teoria a p. 44

TEST

**1** ●○ Per quale o quali valori di $a$ la frazione $\frac{3a}{a^2-4}$ perde significato?

A $a=0$ B $a=+4 \vee a=-4$ C $a=-3$ D $a=-2 \vee a=2$ E $\nexists a \in \mathbb{R}$

**2** ●○ La frazione algebrica $\frac{x+4}{4x}$ per $x=-4$:

A perde significato. B vale $-\frac{1}{2}$. C vale 1. D vale 0. E vale $\frac{1}{2}$.

**3** ESERCIZIO GUIDA Determiniamo le condizioni di esistenza di:

a. $\frac{3x+2}{x^2-9}$; b. $\frac{x+2y}{2x^2y}$; c. $\frac{2x-1}{x^3-7x+6}$; d. $\frac{25}{x^2+25}$.

a. Dobbiamo porre il denominatore diverso da 0.

$x^2-9 \neq 0 \rightarrow (x-3)(x+3) \neq 0$ ——— poniamo il denominatore diverso da 0

Per la legge di annullamento del prodotto, il prodotto è 0 se e soltanto se almeno uno dei due fattori è 0, quindi deve essere:

$x-3 \neq 0$ e $x+3 \neq 0 \rightarrow$ C.E.: $x \neq -3 \wedge x \neq 3$.

b. $2x^2y \neq 0 \rightarrow$ C.E.: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

c. $x^3-7x+6 \neq 0$.
$P(x)=x^3-7x+6$ è divisibile per $x-1$. Infatti: $P(1)=1-7+6=0$.
Calcoliamo il quoziente con la regola di Ruffini.

| | 1 | 0 | −7 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | +1 | 1 | −6 |
| | 1 | 1 | −6 | 0 |

$\rightarrow x^2+x-6$

Pertanto: $x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$.
Cercando due numeri $x_1$ e $x_2$ tali che $x_1+x_2=+1$ e $x_1 \cdot x_2=-6$, troviamo $x_1=-2$ e $x_2=+3$.
Pertanto: $x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$. Quindi:
C.E.: $x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -3$.

d. $x^2+25 \neq 0$.
Questo è vero per ogni valore di $x$ perché $x^2$ non è mai negativo; quindi:

C.E.: $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Determina le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche.**

**4** $\frac{1}{2y}$; $\frac{x}{3x+1}$; $\frac{2a}{a-6}$.

**5** $\frac{bx^2}{x+5}$; $\frac{7-y}{6-y}$; $\frac{a^2+b^2}{3ab}$.

**6** $\frac{2x+3}{3xy}$; $\frac{1}{x^2+1}$; $\frac{2}{a^4b}$.

**7** $\frac{x+1}{x-9}$; $\frac{3x^2}{2x+1}$; $\frac{1}{xy}$.

**8** $\frac{5-3x}{6x-9}$; $\frac{1-x}{2x^2+1}$; $\frac{1}{y^2-25}$.

**9** $\frac{2a}{a^2-1}$; $\frac{a-1}{a^2-6a+9}$; $\frac{6}{5x^2-45}$.

**10** $\frac{2}{a^2-a}$; $\frac{3b}{2b-b^2}$; $\frac{2a-1}{(a^2-1)(a+7)}$.

**11** $\frac{1}{3x^2-12x+12}$; $\frac{1}{x^2-x-2}$; $\frac{6}{a^3+4a^2}$.

**12** $\frac{7m}{6m^2t+mt}$; $\frac{8}{c^2+b^2}$; $\frac{a^2}{a^2+6a+5}$.

**13** $\frac{3t}{t^3-13t+12}$; $\frac{4-b}{3b^2-12}$; $\frac{1+x}{4x^2+4x+1}$.

**14** $\frac{6ax}{x^2+2x}$; $\frac{1}{y^3+1}$; $\frac{a-3}{(a^2-4)(a^3-a^2)}$.

**15** $\frac{2a}{a-b}$; $\frac{1}{x-y}$; $\frac{a+b}{2a+b}$.

**16** $\frac{2ax}{x-a}$; $\frac{3x+b}{x^2-b^2}$; $\frac{ax^2+1}{x^2-4a^2}$.

**Indica per quali valori di $x$ le seguenti frazioni algebriche si annullano e per quali perdono significato.**

**17** $\frac{x^2+3x}{x+1}$; $\frac{2x}{x^2-4}$; $\frac{x+1}{x^2+1}$; $\frac{x-2}{x^2+9}$; $\frac{7x^3}{1-x}$; $\frac{2x^2+10x}{(x+5)(3x-1)}$.

**18** $\frac{x-6}{x^2-6x}$; $\frac{x^2-1}{x^2+3x}$; $\frac{x}{-x^2-4}$; $\frac{8-2x^2}{x+2}$; $\frac{(x^2+1)^3}{3x}$; $\frac{8x^2+1}{2x-1}$.

**19** **AL VOLO** Quali tra le seguenti frazioni algebriche non perdono mai significato?

**a.** $\frac{3+x}{2}$; **b.** $\frac{x^2}{x^2-1}$; **c.** $\frac{7}{y^2}$; **d.** $\frac{8t}{t^2+1}$; **e.** $\frac{5+a}{16}$.

**FAI UN ESEMPIO**

**20** di una frazione algebrica che ha come C.E. $x \neq 0 \wedge x \neq 1$ e assume valore 0 per $x = 3$.

**21** di una frazione algebrica che ha come C.E. $x \neq -2$ e assume valore 5 per $x = 1$.

**22** **VERO O FALSO?** La frazione $\frac{x^2-6x}{x^3-4x}$:

**a.** si annulla per $x = 0$ e per $x = 6$. V F

**b.** assume valore $\frac{7}{3}$ per $x = -1$. V F

**c.** se $x = -2$, perde significato. V F

**d.** ha come C.E. $x \neq \pm 2$ e $x \neq 0$. V F

**23** **TEST** Solo una delle seguenti frazioni algebriche ha come C.E. $x \neq 1$. Quale?

A $\frac{1}{x^2-x}$ B $\frac{7}{2x^2-2}$ C $\frac{6x^2}{x^4-2x^2-1}$ D $\frac{1}{x^3-x^2+x-1}$ E $\frac{1}{x^3+1}$

**24** **EUREKA!** **Quasi le stesse** Indica quale delle seguenti frazioni algebriche ha come C.E. $x \neq 2 \wedge x \neq -1$.

A $\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$ B $\frac{x^2-1}{(x^2+1)(2x^2-2x-4)}$ C $\frac{x}{x^3-x^2-2x}$ D $\frac{x^2+x-2}{(x^2-4)(x+1)}$ E $\frac{2x}{(x-2)^2(x^2-1)}$

ESERCIZI

## Frazioni algebriche come funzioni

Indica i valori per cui le seguenti funzioni perdono significato e quelli per cui si annullano.

**25** ●○ $f(x) = \frac{3x}{3-2x}$

**26** ●○ $f(x) = \frac{2+x}{6+4x}$

**27** ●○ $f(x) = \frac{x^2}{10-4x}$

**28** ●○ $f(x) = \frac{1-x}{x^2+x}$

**29** ●○ $f(x) = \frac{4x^2-4}{16-x^2}$

**30** ●○ $f(x) = \frac{4x^2-1}{x^3-x^2-2x}$

**31** ●○ Data la funzione $f(x) = \frac{2-x}{x+5}$, trova il suo dominio e calcola $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$. $\left[x \neq -5; \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, 0\right]$

**32** ●○ Determina il dominio di $f(x) = \frac{3x^2-x}{x^2-2x}$ e calcola $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$, $f(0)$. $\left[x \neq 0 \wedge x \neq 2; 0, \frac{6}{7}\right]$

**33** ●○ Determina il dominio di $f(x) = \frac{x-4}{4-x^2}$ e calcola $[3f(-1)+f(1)]:f(0)$. $[x \neq \pm 2; 6]$

**34** ●● Considera le funzioni $f(x) = \frac{5-x}{3x^2-6x}$ e $g(x) = \frac{2+x}{6x^2-6}$.

a. Determina il dominio di $f$ e $g$.

b. Calcola $f(1), f(-4), g(0), g(2)$.

c. Calcola $\frac{1}{2} \cdot f(1) \cdot g(0) - g(2)$.

$\left[\text{a) } x \neq 0 \wedge x \neq 2; x \neq \pm 1;\ \text{b) } -\frac{4}{3}; \frac{1}{8}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{9};\ \text{c) } 0\right]$

## Frazioni equivalenti

▶ Teoria a p. 45

**35** ●○ **VERO O FALSO?**

a. $\frac{x}{x+1}$ e $\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ sono equivalenti se $x \neq -1$ e $x \neq 2$. V F

b. $\frac{a-2}{a^2}$ e $\frac{2-a}{-a^2}$ non sono equivalenti. V F

c. Due frazioni algebriche equivalenti hanno sempre le stesse condizioni di esistenza. V F

d. Se due frazioni algebriche hanno le stesse condizioni di esistenza, allora sono equivalenti. V F

Indica se le seguenti coppie di frazioni sono equivalenti nel dominio comune.

**36** ●○ $\frac{5xy^2}{x^2y^3}$; $\frac{5}{xy}$.

**37** ●○ $\frac{3a+1}{8x}$; $\frac{3ax+x}{8x}$.

**38** ●○ $\frac{2b}{3a}$; $\frac{3ab+3a^2}{2b^2+2ab}$.

**39** ●○ $\frac{9x^2-a^2}{6x^2-2ax}$; $\frac{3x+a}{2x}$.

**40** ●○ **ASSOCIA** a ogni frazione della prima riga la frazione della seconda a essa equivalente.

| a. $\frac{1}{2x}$ | b. $\frac{2x+4}{x^2+3x+2}$ | c. $\frac{x+2}{x^2-4}$ | d. $-x$ |
|---|---|---|---|
| 1. $\frac{-x^2-2x}{x+2}$ | 2. $\frac{2}{x+1}$ | 3. $\frac{x+3}{2x^2+6x}$ | 4. $\frac{-1}{2-x}$ |

**COMPLETA** applicando la proprietà invariantiva.

**41** ●○ $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x^2-1}{\square}$; $\frac{3xy}{x-2y} = \frac{\square}{4x^2-16y^2}$.

**42** ●○ $\frac{x+6}{x-3} = \frac{x^2+5x-6}{\square}$; $\frac{x-2}{3x} = \frac{x^3-8}{\square}$.

ESERCIZI

**COMPLETA** trasformando ogni frazione in una frazione equivalente con denominatore assegnato.

**43** $\frac{2a+1}{x} = \frac{\square}{x^2}$; $\frac{x-1}{2a} = \frac{\square}{4a^2x}$.

**44** $\frac{7}{x^2y^2} = \frac{\square}{x^6y^6}$; $3x-2 = \frac{\square}{3x^2}$.

**45** $\frac{1}{a+1} = \frac{\square}{2a(a^2-1)}$; $3x = \frac{\square}{a+x}$.

**46** $\frac{8y}{x-2} = \frac{\square}{x^2y-4y}$; $\frac{a+1}{a-3} = \frac{\square}{a^2-5a+6}$.

## Semplificazione

**47** **CACCIA ALL'ERRORE**

a. $\frac{x^2+5ax}{x+2} = \frac{x(x+5a)}{x+2} = \frac{x+5a}{2}$

b. $\frac{x+2}{x^2+4x+4} = \frac{x+2}{(x+2)^2} = \frac{1}{2}$

c. $\frac{t^2+4}{8+2t} = \frac{(t+4)(t-4)}{2(4+t)} = \frac{t-4}{2}$

d. $\frac{3y+6}{y+2+y^2} = \frac{3(y+2)}{(y+2)+y^2} = \frac{3}{y^2}$

**48** **ESERCIZIO GUIDA** Semplifichiamo le frazioni algebriche:

a. $\frac{10x^6y^4}{2xy^5}$; b. $\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3}$; c. $\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2-9}$.

a. C.E.: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$. $\frac{10x^6y^4}{2xy^5} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}\,\overset{x^5}{\cancel{x^6}}\,\cancel{y^4}}{\cancel{2}\,\cancel{x}\,\cancel{y^5}\,\underset{y}{\cancel{y}}} = \frac{5x^5}{y}$.

b. C.E.: $x^2-2x-3 \neq 0 \rightarrow (x-3)(x+1) \neq 0 \rightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -1$.
Scomponiamo numeratore e denominatore e semplifichiamo i fattori comuni.

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3} = \frac{\overset{(x-3)}{\cancel{(x-3)^2}}}{\underset{(x-3)}{\cancel{(x-3)}}(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}.$$

c. C.E.: $x^2-9 \neq 0 \rightarrow (x-3)(x+3) \neq 0 \rightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -3$.

Scomponiamo il numeratore con un raccoglimento parziale.

$$x^3+x^2-9x-9 = x^2(x+1)-9(x+1) = (x+1)(x^2-9).$$

Pertanto:

$$\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2-9} = \frac{(x+1)\cancel{(x^2-9)}}{\cancel{x^2-9}} = x+1.$$

Quando è possibile, semplifica le seguenti frazioni algebriche. Per brevità, qui e in seguito, nei risultati non scriviamo le condizioni di esistenza.

**49** $\frac{2a^4b^2c^2}{4a^4c^2}$; $\frac{9x^3y^3}{3x^3}$; $\frac{5ab^2}{15ab^3}$; $\frac{4x^2y^2}{8x^2y^2z}$.

**50** $\frac{4b^3c^7}{b^2c^5}$; $\frac{3a^2b^2c^2}{6abc}$; $\frac{14x^2y^4}{7xy^3}$; $\frac{x^4y^2}{2x^2y^2}$.

**51** $\frac{8a^2b^3x^2}{16a^2b^3}$; $\frac{4x^6y^4z^5}{x^3y^4z^4}$; $\frac{8a^3b^4c^3}{8a^2b^4c^3}$; $\frac{2ab^3}{4ab^3c}$.

**52** $\frac{2x^3-4x^2}{x^2-4}$; $\frac{x^2y-x^2}{1-y}$.

**53** $\frac{6x-xy+2y-12}{x-2}$; $\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$.

**54** $\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$; $\frac{a^6-a^2}{a+a^3}$.

**55** $\frac{x-1}{1-x^2}$; $\frac{xy+2y}{5ax+10a}$. $\left[-\frac{1}{x+1}; \frac{y}{5a}\right]$

**56** $\frac{3a^2-3}{-ab+b}$; $\frac{ab+2a^2b}{1-4a^2}$. $\left[-\frac{3(a+1)}{b}; \frac{ab}{1-2a}\right]$

**57** $\frac{a^2xy+2a^2b}{ax^2y^2-4ab^2}$; $\frac{16y-y^3}{16+4y}$. $\left[\frac{a}{xy-2b}; \frac{y(4-y)}{4}\right]$

**58** $\frac{5x+6x^2}{ax+6bx}$; $\frac{x^2b-x^2}{-b^2+1}$. $\left[\frac{5+6x}{a+6b}; -\frac{x^2}{b+1}\right]$

**59** $\frac{abx}{a^2bx-4ab^2}$; $\frac{12a^3-27ab^2}{3b^3+2ab^2}$. $\left[\frac{x}{ax-4b};\ \frac{3a(2a-3b)}{b^2}\right]$

**60** $\frac{by+2y}{2bx+b^2x}$; $\frac{4-b}{3b^2-48}$. $\left[\frac{y}{bx};\ -\frac{1}{3(b+4)}\right]$

**61** $\frac{3x^5}{12x+12x^2}$; $\frac{8a^3+4a}{4a^2+1}$; $\frac{b^2+3b+2}{b^2+2b+1}$; $\frac{y^2-2y-3}{y^2-1}$. $\left[\frac{x^4}{4(1+x)}\text{; non semplif.; }\frac{b+2}{b+1};\ \frac{y-3}{y-1}\right]$

**62** $\frac{a^4-1}{a^3-1}$; $\frac{ax+2x-a-2}{ax-2x-a+2}$; $\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$. $\left[\frac{(a+1)(a^2+1)}{a^2+a+1};\ \frac{a+2}{a-2};\ \frac{a+2}{a-2}\right]$

**63** $\frac{9a^2-9}{3a+3}$; $\frac{ay+ax+2y+2x}{4ay+4ax}$; $\frac{9-3y}{3a^2-a^2y}$. $\left[3(a-1);\ \frac{a+2}{4a};\ \frac{3}{a^2}\right]$

**64** $\frac{x^2-9}{6a+2ax}$; $\frac{a^2x+2ax+x}{2x+2ax}$; $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$. $\left[\frac{x-3}{2a};\ \frac{a+1}{2};\ \frac{x+1}{x-3}\right]$

**65** $\frac{ax-x+3a-3}{x^2+4x+3}$; $\frac{y^2-9}{y^3-3y^2}$; $\frac{x^3+4x^2+4x}{4-x^2}$. $\left[\frac{a-1}{x+1};\ \frac{y+3}{y^2};\ \frac{x(x+2)}{2-x}\right]$

**66** $\frac{x^2y-4y}{-2y-xy}$; $\frac{a^2-10a+25}{a^2-25}$; $\frac{6x^3-6xy^2}{x^2+xy}$. $\left[2-x;\ \frac{a-5}{a+5};\ 6(x-y)\right]$

**67** $\frac{2a^4-2x^4}{4a^2+4x^2}$; $\frac{x^2-2x}{x^2+2x-8}$; $\frac{6ax^2-6ay^2}{3x^3-3y^3}$. $\left[\frac{a^2-x^2}{2};\ \frac{x}{x+4};\ \frac{2a(x+y)}{x^2+xy+y^2}\right]$

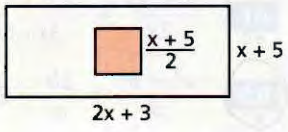
**68** $\frac{y^2-3y+2}{y^2-y-2}$; $\frac{16a^2-24ab+9b^2}{28ab-21b^2}$; $\frac{1-4b^2}{1+4b+4b^2}$. $\left[\frac{y-1}{y+1};\ \frac{4a-3b}{7b};\ \frac{1-2b}{1+2b}\right]$

**69** $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-x}$; $\frac{x^2-2xy+y^2}{9x-9y}$. $\left[\frac{x^2+5x+6}{x};\ \frac{x-y}{9}\right]$

**70** $\frac{2x^2+2x-12}{x^3-7x+6}$; $\frac{8y^2-8}{4ay+12y+4a+12}$. $\left[\frac{2}{x-1};\ \frac{2(y-1)}{a+3}\right]$

**71** $\frac{2x^3+2}{x^3+x^2+x+1}$; $\frac{a^3-3a^2+4}{a^2-a-2}$. $\left[\frac{2(x^2-x+1)}{x^2+1};\ a-2\right]$

**72** **EUREKA!** **Interno fratto esterno** Ricava il rapporto tra l'area del quadrato interno e l'area del rettangolo esterno.




A $\frac{x+5}{4(2x+3)}$ C $\frac{(x+5)^2}{2(2x+3)}$ E Nessuna delle precedenti.

B $\frac{2x+3}{2(x+5)}$ D $\frac{2x+3}{4(x+5)}$

[USA *Catawba College NCCTM Mathematics Contest*, 2007]

**COMPLETA**

**73** $\frac{\square}{x-2}=2x$; $\frac{\square}{2a+2}=2(a-1)$.

**74** $\frac{8-\square}{b^2-4}=-2$; $\frac{\square}{3a^4-3y^4}=\frac{3}{a^2-y^2}$.

**75** $\frac{\square}{x^2-4x+3}=\frac{y}{x-3}$; $\frac{a^2-1}{\square}=\frac{1}{a^3}$.

**76** $\frac{\square}{2x^2+3x-2}=\frac{x+2}{1-2x}$; $\frac{2a-3}{x+1}=\frac{9-4a^2}{\square}$.

**77** **RIFLETTI SULLA TEORIA** È vero che la funzione $f(x)=\frac{2x^2-2}{x^2+3x+2}$ si annulla per $x=\pm1$? Motiva la risposta.

ESERCIZI

## 2 Operazioni con frazioni algebriche

### Addizione e sottrazione

▶ Teoria a p. 45

**78** ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo: a. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2y}+\frac{3}{2xy}$; b. $\frac{2a}{2a+a^2}-\frac{8}{4-a^2}-\frac{2}{a}$.

a. Al denominatore abbiamo solo monomi → C.E. $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.
Riduciamo allo stesso denominatore (mcm dei denominatori) usando la proprietà invariantiva e sommiamo i numeratori.

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2y}+\frac{3}{2xy}=\frac{2y}{2x^2y}-\frac{x^2}{2x^2y}+\frac{3x}{2x^2y}=\frac{2y-x^2+3x}{2x^2y}$$

b. Scomponiamo in fattori i denominatori e scriviamo le C.E.:

$$\frac{2a}{a(2+a)}-\frac{8}{(2-a)(2+a)}-\frac{2}{a} \quad \rightarrow \quad \text{C.E.: } a \neq 0 \wedge a \neq \pm 2.$$

Riduciamo allo stesso denominatore e sommiamo:

$$\frac{2a\cdot(2-a)-8\cdot a-2(2+a)(2-a)}{a(2+a)(2-a)}=\frac{4a-\cancel{2a^2}-8a-8+\cancel{2a^2}}{a(2+a)(2-a)}=\frac{-4a-8}{a(2+a)(2-a)}.$$

Raccogliamo $-4$ al numeratore e semplifichiamo:

$$\frac{-4(a+2)}{a(2+a)(2-a)}=-\frac{4}{a(2-a)}=\frac{4}{a(a-2)}.$$

**Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni di frazioni algebriche, semplificando il risultato quando è possibile.**

**79** $\frac{11}{2a^2x^2}-1-\frac{3}{4a^2x^2}$ $\left[\frac{19-4a^2x^2}{4a^2x^2}\right]$

**80** $\frac{a+b}{2a}-\frac{2a-b}{3b}-\frac{3b-a}{6a}$ $\left[\frac{3b-2a}{3b}\right]$

**81** $\frac{x+2y}{2x}+\frac{x-y}{3x}-\frac{x+4y}{6x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

**82** $\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{2b}{a}+2-\frac{(a+b)^2}{ab}$ [0]

**83** $\frac{3}{y}-\frac{x+6y}{2y^2}+\frac{1}{x}$ $\left[\frac{-x^2+2y^2}{2xy^2}\right]$

**84** $\frac{a}{3b^2}-\frac{1}{b}+\frac{6a+1}{6ab}$ $\left[\frac{2a^2+b}{6ab^2}\right]$

**85** $\frac{2}{a+1}-\frac{5}{4a+4}$ $\left[\frac{3}{4a+4}\right]$

**86** $\frac{2x}{3x+1}-\frac{1-x}{3x+1}$ $\left[\frac{3x-1}{3x+1}\right]$

**87** $\frac{x-3}{x-5}-\frac{2x-7}{5-x}$ $\left[\frac{3x-10}{x-5}\right]$

**88** $\frac{a+9}{a+3}-\frac{3-a}{a^2-9}$ $\left[\frac{a+10}{a+3}\right]$

**89** $x-y-\frac{x^2}{x+y}$ $\left[-\frac{y^2}{x+y}\right]$

**90** $\frac{3a-b}{3a+b}-\frac{3a+b}{3a-b}$ $\left[-\frac{12ab}{9a^2-b^2}\right]$

**91** $\frac{a+2}{a^2+a}-\frac{1}{a}+\frac{a+1}{-a^2-2a-1}$ $\left[\frac{1-a}{a(a+1)}\right]$

**92** $\frac{3x}{y+3x}-\frac{y^2}{3xy-9x^2}+\frac{y^2+9x^2}{y^2-9x^2}$ $\left[-\frac{y}{3x}\right]$

**93** $\frac{x+10}{4-x^2}-\frac{3x}{x+2}+\frac{x+1}{x-2}$ $\left[\frac{4-2x}{x+2}\right]$

**94** $\frac{-7a}{a-1}+\frac{5a^2-9a-46}{a^2-4a+3}-\frac{5a-1}{3-a}$ $\left[\frac{3(a+5)}{a-1}\right]$

**95** $\frac{-2x}{3x^2+4x+1}+\frac{1}{9x^2-1}+\frac{1}{x+1}$ $\left[\frac{3x}{9x^2-1}\right]$

**96** $-\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x}$ $\left[\frac{2-x}{(x-1)^2}\right]$

**97** $\frac{2+x}{xy-x^2y}+\frac{3}{xy}-\frac{5x-8}{xy-y}$ $\left[\frac{5(1-x)}{xy}\right]$

**98** $\frac{x+3}{x+5}+\frac{1}{x-2}-\frac{x^2+1}{x^2+3x-10}$ $\left[\frac{2(x-1)}{(x-2)(x+5)}\right]$

**99** $\frac{2x-5}{x+7}+\frac{2x+4}{x-9}-\frac{3x^2+13x-8}{x^2-2x-63}$ $\left[\frac{x-9}{x+7}\right]$

**100** $\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{y^2-x^2}-\frac{xy-y^2}{2xy-x^2-y^2}$ $\left[\frac{x}{x-y}\right]$

**101** $\frac{2}{x+3}+\frac{2-4x}{2x^2+5x-3}+\frac{1}{-x^2-3x}$ $\left[-\frac{1}{x(x+3)}\right]$

**102** $\frac{a^2+2b^2}{a^3+b^3}-\frac{1}{a}+\frac{a+2b}{a^2+b^2-ab}+\frac{b^2-4ab}{a^3+ab^2-a^2b}$ $\left[\frac{1}{a+b}\right]$

**CACCIA ALL'ERRORE** Trova gli errori e spiega perché le uguaglianze sono sbagliate.

**103** a. $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=\frac{2}{a+b}$ b. $1+\frac{2}{x}=\frac{3}{x}$

**104** a. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}=\frac{1}{5x}$ b. $\frac{2a-1}{b^2}-\frac{1-2a}{b^2}=0$

**TEST**

**105** $\frac{x-2}{x-1}-\frac{x+1}{x-1}=$

A 1 B $\frac{2x}{x-1}$ C $\frac{3}{x-1}$ D $\frac{x-3}{x-1}$ E $-\frac{3}{x-1}$

**106** $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b-a}=$

A $a-b$ B $b-a$ C $2a-2b$ D $\frac{a+b}{a-b}$ E 1

## Moltiplicazione

▶ Teoria a p. 46

**107** **ESERCIZIO GUIDA** Calcoliamo: a. $\frac{3t^2y}{5x}\cdot\frac{15x^3}{t^4y}$; b. $\frac{x^2-4x-5}{3x-3}\cdot\frac{18x}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2-x}{3}$.

a. Scriviamo le C.E.: $x\neq 0 \wedge t\neq 0 \wedge y\neq 0$.
Semplifichiamo e moltiplichiamo i numeratori tra loro e i denominatori tra loro:

$$\frac{3t^2\cancel{y}}{\cancel{5}\cancel{x}}\cdot\frac{{}^{3}\cancel{15}x^{\cancel{3}^{2}}}{t^{\cancel{4}^{2}}\cancel{y}}=\frac{9x^2}{t^2}.$$

b. Scomponiamo in fattori:

$$\frac{(x-5)(x+1)}{3(x-1)}\cdot\frac{18x}{(x+1)^2}\cdot\frac{x(x-1)}{3}.$$

Scriviamo le C.E.: $x\neq\pm 1$.
Semplifichiamo:

$$\frac{(x-5)\cancel{(x+1)}}{\cancel{3}\cancel{(x-1)}}\cdot\frac{{}^{2}\cancel{18}x}{(x+1)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{3}}=\frac{2x^3-10x^2}{x+1}.$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni algebriche.

**108** $\frac{x^3y^3}{3ab^2}\cdot\frac{15a^3y}{7x^4y^2}\cdot\frac{x^3}{5a^2y}$; $-9b^3y^2\cdot\frac{3ax^2}{2by}\cdot\frac{2y}{45a^2x^2}$. $\left[\frac{x^2y}{7b^2};-\frac{3b^2y^2}{5a}\right]$

ESERCIZI

**109** $\frac{4ab^3}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2ax}\right)\cdot\frac{3x^2}{ab}$; $\frac{16t^3x^4}{25y}\cdot\frac{15y^2}{xt^2}\cdot\frac{1}{8xy}$. $\left[-\frac{6b^2}{a};\frac{6}{5}\right.$

**110** $\frac{a^2+a}{3}\cdot\frac{18}{2a+2}$; $\frac{9y^2+6y+1}{y^2}\cdot\frac{3y}{3y+1}$. $\left[3a;\frac{9y+}{y}\right.$

**111** $\frac{6x}{x^2+4x+3}\cdot\frac{x^2-1}{2x}$; $\frac{a^2-2a^2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{10a+10b}{5a^3}$. $\left[\frac{3x-3}{x+3};\frac{2-4}{a^2-}\right.$

**112** $\frac{a^2+4a+4}{2-a}\cdot\frac{2a^2-8a+8}{a^2-4}$; $\frac{24}{xy+x-y-1}\cdot\frac{x^2-1}{6x+6}$. $\left[-2(a+2);\frac{4}{y+}\right.$

**113** $\frac{x^2+5x+6}{4x^2+12x}\cdot\frac{x^3}{x^2-4}$; $\frac{18x^2y^2-2}{4y-4}\cdot\frac{3y^2-3y}{3x^2y+3xy-1-x}$. $\left[\frac{x^2}{4(x-2)};\frac{3y(3xy+}{2(x+1)}\right.$

**114** $3x\cdot\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{2xy-x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy}$; $\frac{b^3-8}{8+b^3}\cdot\frac{b+2}{4+2b+b^2}$. $\left[\frac{3x(y-x)}{x+y};\frac{b-2}{4-2b+b}\right.$

**115** $\frac{13xy}{32(9a^2-b^2)}\cdot(24ax-8xb)$; $\frac{x^2+9y^2-6xy}{xy+y^2}\cdot\frac{xy^2+y^3}{3xy-x^2}$. $\left[\frac{13x^2y}{4(3a+b)};\frac{y(3y-}{x}\right.$

**116** $\frac{b^2-2b-3}{b^2-15+2b}\cdot\frac{b^2+4-4b}{b+2}\cdot\frac{b^2+10+7b}{b^2-b-2}$; $\frac{2x}{1-4x^2}\cdot\frac{4x+1+4x^2}{2x-6}$. $\left[b-2;\frac{x(1+2x)}{(1-2x)(x-}\right.$

**Semplifica le seguenti espressioni.**

**117** $\left(\frac{3x}{y^2}-\frac{1}{3x}\right)\cdot\frac{6xy}{3x+y}$ $\left[\frac{6x-2}{y}\right.$

**118** $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{3}{x+1}$ $\left[\frac{3}{x}\right.$

**119** $\frac{2a}{5ax+5x}\cdot\frac{a^2-1}{10a^2}+\frac{1}{5x}$ $\left[\frac{6a-}{25ax}\right.$

**120** $\left(\frac{3a-1}{a}-\frac{a+1}{a^2}\right)\cdot\frac{5a^2}{9a^2-1}$ $\left[\frac{5(a-1}{3a-1}\right.$

**121** $\left(\frac{x-3}{x^2-2x}+\frac{1}{x^2-4}\right)\cdot\frac{x^2+7x+10}{4x^2-24}$ $\left[\frac{x+5}{4x(x-2)}\right.$

**122** $\frac{x^3-8}{x^2+4}\cdot\left(\frac{x-1}{x^2+2x+4}+\frac{5}{x^3+3x^2+6x+4}\right)$ $\left[\frac{x-2}{x+1}\right.$

**123** $\left(\frac{1}{y^2+y}-\frac{1}{y^2-y-2}-\frac{1}{y^2+2y+1}\right)\cdot\frac{y^3+2y^2+y}{2+y^2}$ $\left[-\frac{1}{y-2}\right.$

## Divisione

▶ Teoria a p. 4

**124** ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo: $\frac{x^3+2x^2}{3x+3}:\frac{x+2}{x^2-1}$.

Scomponiamo in fattori i denominatori e i numeratori:

$$\frac{x^2(x+2)}{3(x+1)}:\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=$$

Per l'esistenza delle due frazioni deve essere $x\neq-1\wedge x\neq+1$; inoltre, poiché il divisore deve essere diverso da 0, il suo numeratore deve essere non nullo, quindi $x\neq-2$. In sintesi:

C.E.: $x\neq\pm1\wedge x\neq-2$.

Eseguiamo la divisione, cioè moltiplichiamo per il reciproco del divisore e semplifichiamo:

$$\frac{x^2\cancel{(x+2)}}{3\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+2)}}=\frac{x^2(x-1)}{3}.$$

**Semplifica le seguenti espressioni.**

**125** $\frac{2}{a} : \frac{a-1}{a+1}$; $\frac{5a-5b}{3ab} : \frac{a^2}{a-b}$. $\left[\frac{2(a+1)}{a(a-1)}; \frac{5(a-b)^2}{3a^3b}\right]$

**126** $-12ab : \left(-\frac{2}{3}ab\right)$; $\frac{7bx}{2ay} : \frac{5bx}{4ay}$. $\left[18; \frac{14}{5}\right]$

**127** $1 : \frac{1}{z-t}$; $\frac{3a^2b^3}{2c^2} : (-2ab^2)$. $\left[z-t; -\frac{3ab}{4c^2}\right]$

**128** $10x^3y^3 : \left(-\frac{5y^4}{x^3}\right)$; $\frac{3x}{2x-2} : \frac{7x}{3x-3}$. $\left[-\frac{2x^6}{y}; \frac{9}{14}\right]$

**129** $\frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b-b^3} : ab$; $\frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2} : \left(\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b-b^3} : ab\right)$. $[1; a^2b^2]$

**130** $\frac{10x^4y^5}{12xy^8} : \frac{3x}{10x^2y} : \frac{2x^3}{y^4}$; $\frac{10x^4y^5}{12xy^8} : \left(\frac{3x}{10x^2y} : \frac{2x^3}{y^4}\right)$. $\left[\frac{25}{18}xy^2; \frac{50x^7}{9y^6}\right]$

**131** $\frac{3a-6b}{5a+15} : \frac{a-2b}{a+3}$; $\frac{2x^2+4x+2}{12} : \frac{5x+5}{6x}$. $\left[\frac{3}{5}; \frac{x^2+x}{5}\right]$

**132** $\frac{3t^2+21t}{49-t^2} : \frac{t}{21-3t}$; $\frac{2m^2-2}{m} : \frac{6m-6}{5m}$. $\left[9; \frac{5m+5}{3}\right]$

**133** $\frac{1-x}{1-2x} : \frac{x-1}{1+2x}$; $\frac{a+3}{2a} : \frac{5a+5}{4a^2} : \frac{a+3}{a+1}$. $\left[-\frac{1+2x}{1-2x}; \frac{2a}{5}\right]$

**134** $\frac{6y+3}{y} : \left(\frac{4y^2-4}{y^2} : \frac{3y+3}{4y+2}\right)$; $\frac{a^2-b^2}{a^3-2a^2b} : \frac{a^2+ab}{a-2b} : \frac{2a-2b}{10a^2b}$. $\left[\frac{9y}{8y-8}; \frac{5b}{a}\right]$

**135** $\left(\frac{x^2-x}{x^2+1} : \frac{x^4-x^2}{x^4+2x^2+1}\right) : \frac{x^4-1}{x^2+4x+3}$; $\frac{x^2-4a^2}{ax+a} : \frac{x+2a}{x^2+1+2x} : \frac{a}{x-2a}$. $\left[\frac{x+3}{x(x^2-1)}; \frac{(x-2a)^2(x+1)}{a^2}\right]$

**136** $\frac{2x^3}{x+y} : \frac{4xy}{x^2+2xy+y^2} : \frac{x^2-y^2}{yx-y^2}$; $\frac{2x^3}{x+y} : \left(\frac{4xy}{x^2+2xy+y^2} : \frac{x^2-y^2}{yx-y^2}\right)$. $\left[\frac{x^2}{2}; \frac{x^2(x+y)^2}{2y^2}\right]$

**137** $\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{b}\right) : \left(1-\frac{b-a^2+2ab}{2ab}\right) : \left(-\frac{1}{a}\right)$; $\left(1-\frac{x-3y}{x+y}\right) : \left(\frac{3x+y}{x-y}-3\right)$. $\left[2a; \frac{x-y}{x+y}\right]$

**138** $\left(\frac{2y^2}{1+y}-y+1\right) : \frac{y^2+y^4}{4yz^2+4z^2}$; $\left(x-\frac{y^2+x^2}{x}\right) : \left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$. $\left[\frac{4z^2}{y^2}; \frac{y^3}{y-x}\right]$

**139** $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right) : \left(\frac{a-b}{a+b}-1\right)$ $\left[\frac{2a}{b-a}\right]$

**140** $\frac{z}{z^2-a^2} \cdot (z-a) : \left[\left(1-\frac{a}{z}\right)\frac{az}{z^2-a^2}\right]$ $\left[\frac{z}{a}\right]$

**141** $\left(\frac{a+3}{a-3} : \frac{a^2+2a-3}{a^2-2a-3}+1\right) : (a-1)$. $\left[\frac{2a}{(a-1)^2}\right]$

**142** $\frac{1}{x} : \left(\frac{x-3y}{xy}+\frac{x+y}{x^2}-\frac{y^3-2xy^2}{x^2y^2}\right)$ $\left[\frac{y}{x}\right]$

**143** $x(2x-1) : \left(2x+\frac{1}{2x-2}+\frac{2x-1}{2x-2}\right)$ $[x-1]$

**144** $\left(1-\frac{4}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{x+1}+\frac{4}{x^2-x-2}\right) : \frac{x^3-x^4+8-8x}{2-2x}$ $\left[\frac{2}{x^2(x+1)}\right]$

**145** $\frac{x^2-x}{x^2+4x+4} : \frac{2x^2+6x}{x^2-4}$; $\frac{x^3+1+3x^2+3x}{x^2+5x} : \left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$. $\left[\frac{(x-1)(x-2)}{2(x+2)(x+3)}; \frac{x^2+x}{x+5}\right]$

ESERCIZI

**146** $\left(1-\frac{b-a^2+2ab}{2ab}\right):\frac{1}{2ab}:\left(\frac{a^3}{b}-\frac{b}{a}\right)$; $\left(\frac{10s+2}{s^2-s-12}-\frac{1-s}{s+3}\right):\left(\frac{6}{s-4}+1\right)$. $\left[\frac{a}{a^2}\right.$

**147** $\left(\frac{x^2-2x+1}{x+2}+x\right):\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2+5x+6}$; $\left(\frac{3b}{2a}-\frac{2a}{3b}\right):\left(\frac{a+3}{3a}-\frac{2}{3b}-\frac{1}{3}\right)$. $\left[\frac{x+3}{x+1};\frac{3b}{}\right.$

**148** $(x^3+8)\cdot\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right):\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x-2}{x}\right)$; $\left(\frac{x+5}{x+2}:\frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}-x\right):(x+1)$. $\left[2x^2;\right.$

**149** $\left[2x-\frac{(x+y)(x-y)}{x}\right]:\left(\frac{y^2}{x^2}-1+\frac{1}{x^2-xy}\cdot\frac{2x^3-2x^2y}{x}\right)$

**150** $\left(\frac{2a-x}{a+x}-\frac{a-x}{2a+x}\right):\left(\frac{ax}{4a^3-ax^2}+\frac{1}{2a+x}\right)$ $\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{2a^2}{a+}\right.$

**151** $\left(y-\frac{9y^2-16y}{y+4}\right)\cdot\left(y+\frac{24y+7y^2}{y-4}\right):\frac{16y^2-100}{y^2-16}$ [-

## Potenza

▶ Teoria

**152** ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo: a. $\left(\frac{2a^2b}{x^3}\right)^{-3}$; b. $\left(\frac{4y-2}{4y^2-1}\right)^2$.

a. L'esponente è negativo, quindi dobbiamo invertire la frazione.
Scriviamo le C.E. considerando sia la frazione di potenza sia quella reciproca: $a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge x\neq 0$.

$$\left(\frac{2a^2b}{x^3}\right)^{-3}=\left(\frac{x^3}{2a^2b}\right)^3=\frac{(x^3)^3}{(2a^2b)^3}=\frac{x^9}{8a^6b^3}$$

b. Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore.

$$\left[\frac{2(2y-1)}{(2y-1)(2y+1)}\right]^2$$

Scriviamo le C.E.: $y\neq\pm\frac{1}{2}$. Semplifichiamo ed eleviamo al quadrato numeratore e denominatore:

$$\left[\frac{2\cancel{(2y-1)}}{\cancel{(2y-1)}(2y+1)}\right]^2=\left[\frac{2}{2y+1}\right]^2=\frac{4}{(2y+1)^2}.$$

**Calcola le seguenti potenze.**

**153** $\left(-\frac{2a^2b^3}{3ab^2}\right)^3$; $\left(\frac{3x^2y^3}{6x^3y}\right)^2$; $\left(\frac{5y^2}{x^3z}\right)^{-2}$.

**154** $\left(\frac{3ab^5}{2c^3}\right)^3$; $\left[\left(\frac{a^2mx^3}{3y^2}\right)^2\right]^3$; $\left(-\frac{mt^4}{y^3}\right)^2$.

**155** $\left(-\frac{2ac^2}{3b^4}\right)^{-2}$; $\left(\frac{a-3}{a^2-4a+3}\right)^{-1}$.

**156** $\left(\frac{3a^2-6a+3}{9-9a^2}\right)^4$; $\left(\frac{x^4-y^4}{2xy^2+2x^3}\right)^3$.

**157** $\left(\frac{3a-9}{a^2-5a+6}\right)^{-1}$; $\left(\frac{x^3+6x^2+9x}{2x^4+6x^3}\right)^2$.

**158** $\left(\frac{3x^3y}{6xz}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{a^2-4b^2}{2b-a}\right)^{-3}$.

**159** $\left(-\frac{a^2b^3}{1-2a+a^2}\right)^{-3}$; $\left[\left(\frac{a+b}{a^2-b^2}\right)^2\right]^{-1}$. $\left[-\frac{(1-a)^6}{a^6b^9};(a-\right.$

**160** $\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}\right)^2$; $\left(\frac{x^2-10xy+25y^2}{10y-2x}\right)^2$. $\left[(x-y)^2;\frac{(x-5}{4}\right.$

**161** $\left(\frac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2}\right)^3$; $\left(\frac{2a^2b^3-2ab^4}{2a^2b^2-2a^3b}\right)^5$. $\left[\frac{x^6}{(x+y)^3};-\right.$

**162** EUREKA! **Alla meno uno** Data l'espressione $\left[\frac{x+1}{\left(\frac{x}{x-1}\right)^{-1}}\right]^{-1}$ ricava la frazione algebrica equivalente, dopo aver determinato le condizioni di esistenza. $\left[\frac{x-1}{x(x+1)}; \text{C.E.: } x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1\right]$

**Semplifica le seguenti espressioni.**

**163** $\left(-\frac{1}{ay^3} \cdot \frac{3a^3y}{2b}\right)^3$ $\left[-\frac{27a^6}{8b^3y^6}\right]$

**164** $\left(1-\frac{2x}{x+b}\right)^4$ $\left[\frac{(x-b)^4}{(x+b)^4}\right]$

**165** $\left(\frac{a^3+a^2b+ab^2}{a^3-b^3}\right)^2$ $\left[\frac{a^2}{(a-b)^2}\right]$

**166** $\left(\frac{x^2-4x+4}{3-x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-3}{x^2-4}\right)^4$ $\left[\frac{(x-3)^2}{(x+2)^4}\right]$

**167** $\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)^{-2} : \left(\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^{-1}$ $\left[\frac{a(a-b)}{2b(a+b)}\right]$

**168** $\left(\frac{a^2+1}{a^2-3a-4}-\frac{a+1}{a-4}\right)^2$; $\left(\frac{b}{b-1}\right)^2 \cdot \left(b-\frac{1}{b}\right)^2$. $\left[\frac{4a^2}{(a-4)^2(a+1)^2}; (b+1)^2\right]$

**169** $\left(\frac{x-y}{x+y}-1\right)\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)^{-1}$; $\left[\left(\frac{b^2+3b+9}{b^3-27}\right)^{-2}\right]^3$. $\left[-\frac{y(x-y)}{x(x+y)}; (b-3)^6\right]$

**170** $\left(\frac{x^2-y^2}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{x+y}\right)^{-4}$; $\left(\frac{a^3}{a^2-2a+4}\right)^2 \cdot (a^2+2a)^{-3} \cdot \left(\frac{a^3+8}{a}\right)^2$. $\left[\frac{1}{x-y}; \frac{a}{a+2}\right]$

TUTOR matematica

Allenati con **15 esercizi interattivi** con feedback "hai sbagliato, perché..."

**su.zanichelli.it/tutor3** risorsa riservata a chi ha acquistato l'edizione con tutor

## Riepilogo: Espressioni con le frazioni algebriche

**TEST**

**171** Solo una tra le seguenti espressioni è equivalente a $\left(\frac{-1}{a-1}\right)^{-1}$, con $a \neq 1$. Quale?

A $a-1$ B $\frac{-1}{a-1}$ C $\frac{1}{a-1}$ D $\frac{1}{1-a}$ E $1-a$

**172** La divisione tra una frazione $F$ e $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ dà $x^2-1$. Qual è la frazione $F$?

A $\frac{x+1}{x-1}$ B $\frac{x-1}{(x+1)^2}$ C $\frac{(x+1)^2}{x-1}$ D $\frac{(x+1)^2}{1-x}$ E $\frac{(x-1)^2}{x+1}$

**173** Il prodotto di due frazioni algebriche è: $\frac{a-1}{ax}$, con $a \neq 0 \wedge x \neq 0$. Le frazioni sono:

A $\frac{a-1}{a}$ e $x$. B $\frac{a-1}{x}$ e $\frac{1}{a}$. C $\frac{1}{x}$ e $\frac{a}{x}$. D $\frac{a}{x}$ e $-\frac{1}{a}$. E $\frac{3a-3}{a}$ e $\frac{x}{3a}$.

**COMPLETA** inserendo l'opportuna frazione algebrica.

**174** $\frac{2x}{x+3}+\frac{\square}{\square}-\frac{8-x}{x+3}=\frac{2x-3}{x+3}$

**175** $\frac{\square}{\square}-\left(\frac{x+2}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}\right)=\frac{6-x^2}{x^2-1}$

**176** $\frac{a}{2b+b^2+1} : \left(\frac{\square}{\square}\right)^2=\frac{4}{a}$

**177** $\frac{1-x^2}{x^2-3x-4} \cdot \frac{\square}{\square} : \frac{5x-5}{x^2-4x}=-\frac{5}{x^2}$

ESERCIZI

**Semplifica le seguenti espressioni.**

**178** ●○ $\frac{a^3-2}{4a^2y}+\frac{1}{2}-\frac{a}{4y}+\frac{1}{2a^2y}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

**179** ●○ $\frac{a-1}{a^2b}\cdot\frac{a+1}{b}-\frac{1+2a^2}{a^2}+\frac{b^2+1}{a^2b^2}$ $\left[\frac{1-2b^2}{b^2}\right]$

**180** ●○ $1-\frac{1}{x^2}-\frac{x}{3y^2}+\frac{2x^3+y^3}{6x^2y^2}-\frac{y}{6x^2}$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]$

**181** ●○ $\frac{x^3-4x}{x^2+4x+4}:\frac{x^2-4x+4}{2x^2-8}\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^2$ $\left[\frac{1}{2x}\right]$

**182** ●○ $\frac{(x+y)^2}{2x^2y}+3-\frac{(x-y)^2}{2x^2y}-\frac{1}{x}$ $\left[\frac{1+3x}{x}\right]$

**183** ●○ $\frac{a+3b}{2a}-\frac{2a-b}{3b}-\frac{4a^2+9b^2}{6ab}+\frac{a-b}{b}$ $\left[-\frac{2a+b}{6b}\right]$

**184** ●○ $\left(1+\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\frac{y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$ $\left[\frac{y}{x+y}\right]$

**185** ●○ $\left(\frac{4}{x^3-3x^2}+\frac{1}{x^3+3x^2}\right)\cdot\frac{x^4-9x^2}{25x^2-81}$ $\left[\frac{1}{5x-9}\right]$

**186** ●○ $\left(\frac{xy}{x+y}-x\right)\left(\frac{xy}{x+y}-y\right)\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}\right)$ $[xy]$

**187** ●○ $\left[\frac{2a+2b}{a}+\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{(a+b)^2}{ab}\right]:\frac{a+1}{9-9a^2}$ $[0]$

**188** ●○ $\frac{4b^2+1}{2b^3}-\frac{1}{12a^2}+\frac{b-36a^4}{12a^2b}-\frac{1}{2b^3}$ $\left[\frac{2-3a^2}{b}\right]$

**189** ●○ $\frac{x^2-4}{y^3-4y^2-5y}:\frac{2y-10-xy+5x}{y+y^2}$ $\left[-\frac{x+2}{(y-5)^2}\right]$

**190** ●○ $\frac{(k+x)(k-x)}{5k^2x^2}-\frac{2-kx}{7x^2}+\frac{4}{35k^2}-\frac{k}{7x}$ $\left[-\frac{3(k^2+x^2)}{35k^2x^2}\right]$

**191** ●○ $\frac{2a^4-3b^2}{12a^4b^2}-\frac{2a^2-3}{12a^2b^2}-\left(\frac{3}{6a^2}\right)^2$ $\left[\frac{a^2-2b^2}{4a^4b^2}\right]$

**192** ●○ $\left[\left(\frac{z}{t}+\frac{m}{y}\right):\frac{mt+zy}{t^2y^2}+\frac{1}{z}\right]-ty$ $\left[\frac{1}{z}\right]$

**193** ●○ $\left[\frac{(a+2)^2}{a^2+2a+4}:\left(\frac{a^3-8}{a+2}\right)^{-1}\right]^2$ $[(a^2-4)^2]$

**194** ●○ $\frac{2}{a}+\frac{a}{5}\cdot\frac{5a+5}{a^2+4a+3}+\frac{4a+3}{a^2+3a}$ $\left[\frac{a+3}{a}\right]$

**195** ●○ $\left(1-\frac{t-y}{t}\right):\left(\frac{t+1}{t^2-ty}+\frac{y+1}{y^2-ty}+\frac{1}{ty}\right)$ [priva di significato perché...]

**196** ●○ $\frac{2x^3}{x+y}:\frac{4xy}{x^2+2xy+y^2}:\frac{x^2-y^2}{yx-y^2}$ $\left[\frac{x^2}{2}\right]$

**7** $\left(\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}\right):\left(\frac{b+a}{ab}-\frac{a^2+b^3}{ab^3}-\frac{a^3-b^2}{a^3b}\right)$ $\left[\frac{ab}{b^2-a^2}\right]$

**8** $(y-2)(x^2y^2)^{-1}:\left(\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{1+y}{y}+\frac{x^2y^2-8}{x^2y^3}\right)$ $\left[\frac{y}{y^2+2y+4}\right]$

**9** $\left(1-\frac{4}{x^2}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{x+1}+\frac{4}{x^2-x-2}\right):\frac{x^3-x^4+8-8x}{-2x^2+6x-4}$ $\left[\frac{2(x+2)(x-2)^2}{x^4(x+1)}\right]$

**10** $\frac{8x^3}{x^3-y^3}:\frac{4x^2y}{x^2+xy+y^2}:\frac{2x}{xy-y^2}$ [1]

**11** $\frac{8x^3}{x^3-y^3}:\left(\frac{4x^2y}{x^2+xy+y^2}:\frac{2x}{xy-y^2}\right)$ $\left[\frac{4x^2}{y^2(x-y)^2}\right]$

**12** $\left(\frac{1}{a+b}-\frac{b}{a^2-ab}+\frac{b^2}{a^3-ab^2}\right):\left(\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}\right)$ $\left[\frac{a-2b}{a}\right]$

**13** $\frac{3x}{x^3-x^2-x+1}-\frac{3x}{2-2x^2}+\frac{x-2}{4x-2x^2-2}$ $\left[\frac{x+1}{(x-1)^2}\right]$

**14** $\left[\frac{2(x-y)^2}{(x+y)}\cdot\frac{28}{3(y-x)}\cdot\left(-\frac{x+y}{8}\right)-\frac{x-y}{3}\right]:(x-y)$ [2]

**15** $\frac{2a}{a^2b-b^3}-\frac{a-b}{2a^2b+2ab^2}-\frac{a+b}{2a^2b-2ab^2}$ $\left[\frac{1}{ab}\right]$

**16** $\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right):\frac{4}{a^2-a-2}:\frac{a^2-1}{a^2+a-2}$ $[a]$

**17** $\frac{6}{1-m^2}+\frac{2}{m^2-3m+2}-\frac{6}{m^2-m-2}$ $\left[\frac{10}{1-m^2}\right]$

**18** $\frac{x^2-5x+6}{x^3-6x^2+12x-8}\cdot\left(\frac{4-x}{x-3}+2\right)$ $\left[\frac{1}{x-2}\right]$

**19** $\frac{2a+7}{a^3+2a^2-a-2}-\frac{3}{a^2+a-2}+\frac{2}{a^2+3a+2}$ $\left[\frac{1}{a^2-1}\right]$

**20** $\left(\frac{4}{b-3}-\frac{3b-5}{b^2-4b+3}\right)\cdot\frac{b^3+3b-4b^2}{b^2+3b}$; $4z^2y\left(1-\frac{z-y}{2z}-\frac{2y}{z+y}\right)\cdot\left(\frac{z^2+3zy}{zy-y^2}-1\right)$.

$\left[\frac{b+1}{b+3};2z(z^2-y^2)\right]$

**21** $\left(\frac{a+2}{a^2+a}-\frac{1}{a}-\frac{a+1}{a^2+2a+1}\right)(1+a)$; $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)\left(1-\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)$. $\left[\frac{1-a}{a};\frac{3(x^2-1)^2}{x^2}\right]$

**22** $\left(\frac{1}{x-x^2}+\frac{2x}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}\right)\cdot\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}\cdot\frac{x}{x+1}$; $1+\frac{2ab}{a^2-ab+b^2}\cdot\frac{a^3+b^3}{a^2+ab}$. $\left[\frac{1}{1-x};1+2b\right]$

**23** $\frac{(a^2-9)^3}{(a^2+14a+49)^2}\cdot\left[\left(\frac{5a-5}{a-3}-4\right):\left(\frac{a-5}{a+7}+\frac{1}{2}\right)\right]^3:\left(\frac{a^2+10a+21}{3a-3}\right)^2$ $\left[\frac{8(a+3)}{3(a-1)}\right]$

**24** $\frac{4x+8}{x^3+2x^2-16x-32}:\left(\frac{x}{x^2+x-12}+\frac{1}{x^2-7x+12}-\frac{x}{x^2-16}\right)$ $[x-3]$

**25** $\left(\frac{1}{2a+4b}+\frac{1}{a-2b}-\frac{3}{a^2-4b^2}\right):\left(\frac{2}{a+2b}-\frac{2b-a+6}{a^2+4b+4b^2}\right)$ $\left[\frac{a+2b}{2(a-2b)}\right]$

ESERCIZI

**216** ●○ Considera

$$f(x)=\frac{x^3}{3x+6} \text{ e } g(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^3+x^2}.$$

a. Determina il dominio di $f$ e $g$.

b. Scrivi l'espressione della funzione $h$ definita come $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

$\left[\text{a) } x\neq -2;\ x\neq -1\wedge x\neq 0;\ \text{b) } h(x)=\frac{x^2+2x}{3x+3}\right]$

**217** ●○ Data $f(x)=\left(-\frac{5}{x}\right)^2\cdot\frac{x^3+4x^2+3x}{10x+10}-\frac{x-3}{2}$:

a. determina il suo dominio;

b. semplifica la sua espressione e calcola $f(4)$.

$\left[\text{a) } x\neq -1\wedge x\neq 0;\ \text{b) } f(x)=\frac{-x^2+8x+15}{2x};\ \frac{31}{8}\right]$

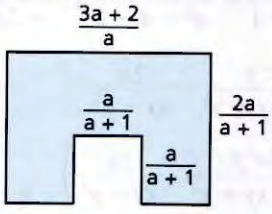
**218** ●○ Un rettangolo ha i lati di $\frac{3x^2+x}{2}$ e $\frac{4}{3x}$. Determina l'area e il perimetro. $(x>0)$

$\left[\frac{6x+2}{3};\ \frac{9x^3+3x^2+8}{3x}\right]$

**219** ●○ Un triangolo di area $\frac{5x+5}{3x+x^2}$ ha base $\frac{5x}{6+2x}$. Calcola l'altezza relativa alla base. $(x>0)$

$\left[\frac{4x+4}{x^2}\right]$

**220** ●○ Calcola l'area della figura sotto. $(a>0)$




$\left[\frac{5a^2+10a+4}{(a+1)^2}\right]$

**MATEMATICA AL COMPUTER**

**Operiamo con le frazioni algebriche** Con Wiris possiamo eseguire calcoli con le frazioni algebriche. Per esempio, se dobbiamo calcolare la somma di tre frazioni algebriche, dopo aver scritto i passaggi sul quaderno, li possiamo verificare al computer, uno dopo l'altro.

**Problema e risoluzione – 7 esercizi in più**

## 3 Equazioni numeriche fratte

▶ Teoria a p. 47

**221** ●○ **VERO O FALSO?**

a. $\frac{5x}{2}+\frac{x^2+1}{3}=0$ è un'equazione fratta. V F

b. $\frac{1}{x+1}=0$ ha come soluzione $x=-1$. V F

c. L'equazione $\frac{3x}{x^2}=0$ è impossibile. V F

d. $\frac{x-1}{x-1}=1$ è un'equazione indeterminata. V F

**AL VOLO** **Le seguenti equazioni sono tutte impossibili. Spiega perché.**

**222** ●○ $\frac{2}{x+5}=0$; $\frac{6x}{x^2-6x}=0$.

**223** ●○ $\frac{x-3}{9-x^2}=0$; $4=\frac{1}{4x}+4$.

**224** ●○ $\frac{10^4-1}{x^2-1}=0$; $\frac{x+1}{2x^2-x-3}=0$.

**225** ●○ $\frac{7x-5}{x-2}=\frac{5x-1}{x-2}$; $\frac{x^2}{x^2-4x}=\frac{4}{x-4}$.

**TEST**

**226** ●○ Solo una delle seguenti equazioni è definita in tutto $\mathbb{R}$. Quale?

A $\frac{2x}{x+8}=3$ B $\frac{2x}{(x+8)^2}=3$ C $\frac{2x}{x^4+8}=3$ D $\frac{2x}{x^3+8}=3$ E $\frac{2x}{x^3-1}=3$

**227** ●○ Le condizioni di esistenza dell'equazione $\frac{2x-1}{x^3+x^2}-\frac{5x-2}{x^2+x-2}=0$ sono:

A $x\neq 1,\ x\neq -2$.

B $x\neq\pm 1,\ x\neq -2,\ x\neq 0$.

C $x\neq 1,\ x\neq 0$.

D $x\neq\pm 1,\ x\neq 2,\ x\neq 0$.

E $x\neq 0,\ x\neq -2$.

**228** ●○ Solo una delle seguenti equazioni *non* ha come condizioni di esistenza $x\neq 0\wedge x\neq -4$. Quale?

A $\frac{1}{x}=\frac{x}{x+4}$ B $\frac{1-x}{x^2+4x}=5x$ C $\frac{x+1}{x^3+4x^2}=x$ D $\frac{1-x}{4x+x^2}=\frac{3}{x}$ E $\frac{2-x}{x^5+4x^3}=x$

**Determina le C.E. delle seguenti equazioni.**

**229** ●○ $\frac{x-1}{x^2+3}-\frac{x^2+5x}{x^3}=0$

**230** ●○ $\frac{-1}{t^2-t}=\frac{t+6}{t^2+5t-6}+2$

**231** ●○ $\frac{3}{m^2-9}+\frac{5-m}{4m^2+4m+1}=\frac{2}{3}$

**232** ●○ $\frac{7-x}{8+x}-\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x^2+5x-14}$

**Risolvi le seguenti equazioni.**

**233** ●○ $\frac{3}{x}-\frac{1}{2x}=3$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

**234** ●○ $\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2}=0$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

**235** ●○ $\frac{13}{5x}+1=-\frac{3}{10}$ $[-2]$

**236** ●○ $\frac{5}{3x}+\frac{1-x^2}{x^2}=-1$ $\left[-\frac{3}{5}\right]$

**237** ●○ $\frac{2}{x+6}+3=-1$ $\left[-\frac{13}{2}\right]$

**238** ●○ $\frac{7x+1}{5-x}=2$ $[1]$

**239** ●○ $\frac{6-x}{3x+3}+\frac{1}{3}=0$ [impossibile]

**240** ●○ $1=\frac{x}{x-2}+\frac{4}{4-2x}$ [ind., $x\neq 2$]

**241** ●○ $\frac{4}{3x+1}+\frac{1}{x-2}=0$ $[1]$

**242** ●○ $\frac{1-2x}{2x+4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{x+2}$ $[-3]$

**243** ●○ $\frac{x-1}{x+5}=\frac{3+x}{x+1}$ $[-2]$

**244** ●○ $\frac{-5}{3x-6}-\frac{x+3}{x^2-4}=0$ $\left[-\frac{19}{8}\right]$

**245** ●○ $\frac{7x-5}{x^2}-\frac{x^2-2x+1}{3x}=\frac{-x+2}{3}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

**246** ●○ $\frac{2x-5}{1-3x}=\frac{4x+15}{9x-3}$ $[0]$

**247** ●○ $\frac{3x+2}{x}=\frac{4x}{3x-1}+\frac{5x^2-2}{3x^2-x}$ [impossibile]

**248** ●○ $\frac{x-5}{x+3}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ $[-35]$

**249** ●○ $\frac{3x+1}{x}=\frac{9x+3}{3x+1}$ [impossibile]

**250** ●○ $\frac{1+4x}{4x-4}+\frac{3}{2x}=\frac{x+1}{x-1}$ $[2]$

**251** ●○ $\frac{4-x^2}{3-x}=1+x$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

**252** ●○ $\frac{x+3(1-2x)}{x^2+4x+4}-\frac{3x}{x+2}=-3$ $[-15]$

**253** ●○ $2+\frac{1-x}{x^2}=\frac{-x+3(x+2)}{x}$ $\left[\frac{1}{7}\right]$

**254** ●○ $\frac{13-6x}{2x+5}-\frac{8-3x}{x-1}=\frac{15x-1}{4x^2+6x-10}$ $[5]$

**255** ●○ $-\frac{8x+7}{2x+1}+\frac{2(4+7x+2x^2)}{(x-2)(1+2x)}+2=0$ $\left[-\frac{18}{17}\right]$

**256** ●○ $\frac{9x^2+4}{6x^2-3x}=\frac{4x+1}{2x}-\frac{x+1}{2x-1}$ $\left[-\frac{11}{12}\right]$

**257** ●○ $\frac{1}{x-1}+\frac{x+4}{x^2+2x-3}=\frac{25+11x+2x^2}{(x-1)(x+3)^2}$ $[2]$

**258** ●○ $3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}=\frac{(x-1)(3x+1)}{x^2}$ $[-1]$

**259** ●○ $\frac{x^2-3x+4}{3x^3+3x^2}-\frac{x^2-4x+8}{3+3x^3}=0$ $\left[\frac{4}{7}\right]$

**260** ●○ $\frac{3x+1}{7x}-\frac{2}{21}=\frac{x^2-2x+1}{3x^2-3x}$ [impossibile]

**261** ●○ $\left(\frac{2-x}{2+x}-1\right)\left(\frac{x+1}{2+x}-1\right)=\frac{4}{x^2+4x+4}$ $[2]$

**262** ●○ $\frac{3x}{4x-2}-\frac{2x}{6x-3}=\frac{5}{2x-1}$ $[6]$

**263** ●○ $\frac{9}{x^2+4x+4}=1-\frac{x}{x+2}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

**264** ●○ $\frac{4x}{1+x}-3=\frac{3x-9}{3x+3}$ [ind., $x\neq -1$]

**265** ●○ $\frac{x-3}{4}-\frac{x-3}{x}=0$ $[3;4]$

**266** ●○ $\frac{3x^3+2x^2}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

**267** ●○ $\frac{5}{x^2-3x}+\frac{2}{x^2-9}=\frac{5}{3-x}+1-\frac{x^3-5x^2+1}{x^3-9x}$ $\left[-\frac{16}{31}\right]$

**268** ●○ $\frac{9x-4}{x-2}=\left(3+\frac{2}{x-2}\right)\left(3-\frac{2}{x-2}\right)$ $\left[\frac{12}{7}\right]$

**269** ●○ $\frac{1-x^2}{2x^3-16}=\frac{4x-3}{x^2+2x+4}+\frac{9}{4-2x}$ $\left[-\frac{5}{8}\right]$

ESERCIZI

**270** $\frac{x^2+x-2}{4x-4} = \frac{x^3+1}{4+4x^3}$ [impossibile]

**271** $\frac{5-x}{x^2+3x} + \frac{x+1}{2x} = \frac{x-4}{2x+6}$ $\left[-\frac{13}{6}\right]$

**272** $\frac{4x}{4x^2-1} - \frac{x-3}{2x^2-x} + \frac{5-x}{2x^2+x} = 0$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

**273** $\frac{4x-3}{x^2+x-12} + \frac{3x+1}{x^2+8x+16} = \frac{7}{x+4}$ $\left[\frac{69}{2}\right]$

**274** $\left(\frac{1+x}{1-x}+1\right)\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right) = \frac{4x^2+x-1}{(x-1)^3}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

**275** $\frac{-2(1-3x)}{3x} - \frac{5x+1}{x+1} + \frac{3x^2-1}{x^2+x} = 0$ [5]

**276** $\frac{x-10}{x^2+5} - \frac{x-1}{x^2+5x} + \frac{4x+35}{(x+5)(x^2+5)} = 0$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

**277** $\frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x-x^2)}$ [impossibile]

**278** $\frac{x^2+25+10x}{x^2+2x-15}\left(\frac{x}{x+5} - \frac{x}{x+2} : \frac{x+1}{x+2}\right) = 0$ [0]

**279** $\frac{1}{2x-1} - \frac{3}{3x+6} = \frac{-2x^2-5x+9}{4x^3+8x^2-x-2}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

**280** $\frac{-1-5x^2}{x-x^2-2x^3} - \frac{x-1}{x+x^2} = \frac{3}{2x+1} - \frac{6x}{x-4x^3}$ $\left[\text{ind., } x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq \pm\frac{1}{2}\right]$

**281** $\frac{1}{3}\left[\frac{3x}{x^2-1} - \left(\frac{x}{x+1} - 2\right)\right] = \frac{3}{1-x} + \frac{x^2-6}{3x^2-3}$ [impossibile]

---

**282** YOU & MATHS **Check it!** Is there a number $x$ such that $\frac{x-1}{x^2-2x+1} = 0$? If so, find it; otherwise explain why not.

**283** Date $f(x) = \frac{1}{x+7}$ e $g(x) = \frac{3}{x^2+6x-7} + \frac{1}{x}$:

a. determina il loro dominio;

b. trova gli zeri di $f(x) - g(x)$.

$\left[\text{a) } D_f: x \neq -7, D_g: x \neq -7 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 0; \text{b) } \frac{7}{10}\right]$

**284** Date $f(x) = \frac{1}{x-2}$ e $g(x) = \frac{2}{4-x^2}$:

a. determina il loro dominio;

b. calcola il valore di $x$ per cui $f(x) = g(x)$.

[a) $D_f$: $x \neq 2$, $D_g$: $x \neq \pm 2$; b) $-4$]

**285** YOU & MATHS **Possible values** Could the fraction $\frac{3}{x-2}$ take on the value $\frac{3}{2}$ (that is, can $\frac{3}{x-2} = \frac{3}{2}$)? For what value of $x$? Give another example of a value it can take on and an example of a value it cannot take on.

---

**Particolari equazioni di grado superiore al primo**

Risolvi le seguenti equazioni.

**286** $\frac{x^2-2x}{x-1} = 0$

**287** $\frac{(x-4)(6-8x)}{4x-1} = 0$

**288** $\frac{3x^2+5x-2}{x^2+2x} = 0$

**289** $\frac{x^3-2x^2-9x+18}{x-3} = 0$

**290** $\frac{2x^3+x^2-2x-1}{x^2+4x-5} = 0$

**291** $\frac{(x-2)^2(x^2+2x)}{(x^5-16x)} = 0$

**292** $\frac{(2x-3)(x^2-25)}{2x-10} = 0$

**293** $x - 4 + \frac{4-x}{x^2} = 0$

## Problemi sui numeri

**294** ●○ In una frazione il numeratore supera di 5 il denominatore. Trova la frazione sapendo che se viene sommata a $\frac{2}{3}$ si ottiene $\frac{5}{2}$. $\left[\frac{11}{6}\right]$

**295** ●○ Trova due numeri tali che la loro differenza sia 2 e il rapporto del maggiore sul minore sia uguale al reciproco del minore sommato a $\frac{11}{10}$. [12; 10]

**296** ●○ Sommando un numero naturale al numeratore e denominatore di $\frac{8}{3}$ si ottiene la stessa frazione che si ricava sottraendo lo stesso numero dal numeratore e denominatore di $\frac{14}{9}$. Trova il numero. [3]

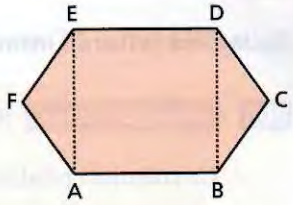
**297** ●○ La differenza fra due numeri naturali è 49 e il rapporto fra la loro semisomma e il minore dei due è uguale a $\frac{81}{32}$. Quali sono i due numeri? [16; 65]

**298** ●○ In un numero naturale di tre cifre, la cifra delle centinaia è 2 e quella delle unità è 4. Il rapporto fra il numero e quello che si ottiene scrivendo le cifre in ordine inverso e incrementandolo di 6 è $\frac{1}{2}$. Trova il numero. [204]

**299** ●● La somma fra il denominatore e il doppio del numeratore di una frazione è 40. Se si aumenta di 2 il numeratore e si diminuisce di 5 il denominatore si ottiene una frazione equivalente a $\frac{5}{3}$. Trova la frazione. $\left[\frac{13}{14}\right]$

## Problemi geometrici

**300** ●○ Calcola l'area della figura, sapendo che è composta da un quadrato e due triangoli isosceli congruenti, che la somma di $AB$ e $BC$ è 13 cm e che il rapporto tra il suo perimetro e $BC$ è $\frac{36}{5}$.

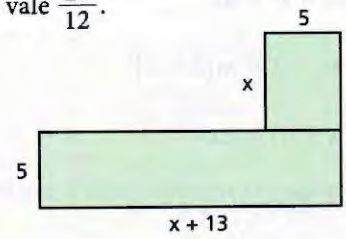



[88 cm²]

**301** ●○ In una circonferenza di centro $O$ e diametro $AB$ la corda $AD$ supera il raggio di 2 cm. Il raggio $OC$ è parallelo ad $AD$ e la corda $DC$ misura 1 cm meno del raggio. Sapendo che $\frac{\overline{AO}+\overline{AD}}{\overline{OC}+\overline{DC}}=\frac{5}{4}$, determina il perimetro del quadrilatero $AOCD$. [27 cm]

**302** ●○ Nel trapezio isoscele $ABCD$ la differenza fra la base maggiore $AB$ e la minore $DC$ è 6 cm. Sapendo che $\frac{3\overline{AB}+2\overline{CD}}{\overline{AB}+\overline{CD}}=\frac{34}{13}$, determina le lunghezze delle basi del trapezio. [16 cm, 10 cm]

**303** ●○ Determina il valore di $x$, sapendo che il rapporto tra le misure dell'area e del perimetro della figura sotto vale $\frac{25}{12}$.




[6 cm]

## REALTÀ E MODELLI

**304** ●○ **Corpi** Due corpi hanno le masse, la differenza dei volumi e il rapporto delle densità come indicato nel foglietto. Quanto valgono i due volumi? [1,2 dm³; 1,25 dm³]

$m_1 = 1{,}8$ kg
$m_2 = 2$ kg
$V_1 = V_2 - 0{,}05$ dm³
$\frac{\delta_1}{\delta_2} = 0{,}9375$

**305** ●● **Meno operai e più lavoro!** Un'impresa specializzata nel montaggio di impalcature per l'edilizia, utilizzando 20 operai, impiega 5 giorni per allestire ponteggi per una lunghezza complessiva di 1000 metri. Quanti giorni impiega nel montaggio di 1500 metri, utilizzando 15 operai? (Supponi che rimanga invariato il ritmo di lavoro.) [10]

ESERCIZI

# 4 Equazioni letterali

▶ Teoria a p. 4

## Equazioni letterali intere

**306** ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $3a(x+2) = -2x(a+1)$, nell'incognita $x$.

Calcoliamo i prodotti e isoliamo a sinistra i termini che contengono $x$.

$3ax + 6a = -2ax - 2x \rightarrow 5ax + 2x = -6a$

Raccogliamo $x$: $(5a+2)x = -6a$.

**Discussione**

Se $5a + 2 = 0$, cioè $a = -\frac{2}{5}$: $0 \cdot x = -6 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \rightarrow$ impossibile.

Se $5a + 2 \neq 0$, cioè $a \neq -\frac{2}{5}$, isoliamo $x$ dividendo per $5a + 2$:

$\frac{(5a+2)x}{5a+2} = \frac{-6a}{5a+2} \rightarrow x = -\frac{6a}{5a+2} \rightarrow$ determinata.

In sintesi: per $a = -\frac{2}{5}$: impossibile; per $a \neq -\frac{2}{5}$: determinata, $x = -\frac{6a}{5a+2}$.

**Risolvi le seguenti equazioni letterali nell'incognita $x$.**

**307** $3ax = 2$ $\left[a = 0: \text{imp.}; a \neq 0: x = \frac{2}{3a}\right]$

**308** $b^2x = 3b$ $\left[b = 0: \text{ind.}; b \neq 0: x = \frac{3}{b}\right]$

**309** $(a-6)x = 3a$ $\left[a = 6: \text{imp.}; a \neq 6: x = \frac{3a}{a-6}\right]$

**310** $3kx = k^2 + 4k$ $\left[k = 0: \text{ind.}; k \neq 0: x = \frac{k+4}{3}\right]$

**311** $5mx + 2 = m(3-x)$ $\left[m = 0: \text{imp.}; m \neq 0: x = \frac{3m-2}{6m}\right]$

**312** $a(x+4) = 2x$ $\left[a = 2: \text{imp.}; a \neq 2: x = -\frac{4a}{a-2}\right]$

**313** $(a+3)x - 1 = a + x$ $\left[a = -2: \text{imp.}; a \neq -2: x = \frac{a+1}{a+2}\right]$

**314** $2ax - x + \frac{a}{2} = 1 + 3(a-1)x$ $\left[a = 2: \text{ind.}; a \neq 2: x = \frac{1}{2}\right]$

**315** $-a^2(x-1) - 4ax + 8(a+1) = 24$ $\left[a = 0 \vee a = -4: \text{imp.}; a \neq 0 \wedge a \neq -4: x = \frac{a^2+8a-16}{a(a+4)}\right]$

**316** $b[(b+x)-2] = b^2 + bx$ [$b = 0$: ind.; $b \neq 0$: impossibile]

**317** $4kx - 3 = 1 + kx + k$ $\left[k = 0: \text{imp.}: k \neq 0: x = \frac{4+k}{3k}\right]$

**318** $7(kx + x - 1) = k(3x-1) - 5 - x$ $\left[k = -2: \text{imp.}; k \neq -2: x = \frac{2-k}{4(2+k)}\right]$

**319** $10a - 8 = 15a^2x - 12ax$ $\left[a = 0: \text{imp.}; a = \frac{4}{5}: \text{ind.}; a \neq 0 \wedge a \neq \frac{4}{5}: x = \frac{2}{3a}\right]$

**320** $ax - a + 3 = 2(a-x)$ $\left[a = -2: \text{imp.}; a \neq -2: x = \frac{3(a-1)}{a+2}\right]$

**321** $k = 3kx - 8x - (2k + x)$ $\left[k = 3: \text{imp.}; k \neq 3: x = \frac{k}{k-3}\right]$

**322** $k^2 - kx = k^2(2x - 4)$ $\left[k = 0\text{: ind.}; k = -\frac{1}{2}\text{: imp.}; k \neq 0 \wedge k \neq -\frac{1}{2}: x = \frac{5k}{2k+1}\right]$

**323** $-2a + a(3 - ax) = (a - 2)(x - 1)$ $\left[a = -2\text{: imp.}; a = 1\text{: ind.}; a \neq -2 \wedge a \neq 1: x = \frac{2}{a+2}\right]$

**324** $(a + 1)(a - 1)x - (1 + a)(1 - a)x = a$ $\left[a = 1 \vee a = -1\text{: imp.}; a \neq 1 \wedge a \neq -1: x = \frac{a}{2(a^2-1)}\right]$

**325** COMPLETA L'equazione $(a^2 - 9)x = 2a - 6$ nell'incognita $x$ è:

**a.** impossibile se $a =$ ___; **b.** ___ se $a = 3$; **c.** determinata se $a$ ___, con $x =$ ___.

**326** TEST Considera la seguente equazione letterale dipendente dal parametro $k$: $(k - 2)x + 2kx + 1 = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è *vera*?

**A** Per $k = \frac{2}{3}$, l'equazione è indeterminata.

**B** Ammette sempre almeno una soluzione.

**C** Per $k = 1$, l'equazione ha soluzione $x = 3$.

**D** Per nessun $k$, la soluzione è $x = 0$.

**E** Per $k = 2$, l'equazione è impossibile.

**327** Data l'equazione $ax - 3a + x = (2a + 1)x + a - 2$ nell'incognita $x$, esiste qualche valore del parametro $a$ per il quale l'equazione ha soluzione $x = 2$? $\left[a = \frac{1}{3}\right]$

### Equazioni letterali intere con lettere al denominatore

**328** VERO O FALSO? L'equazione $\frac{x}{a^2-1} + \frac{x+2}{a+1} = 0$ nell'incognita $x$:

**a.** perde significato solo per $a = -1$. V F

**b.** è impossibile se $a = 0$. V F

**c.** ha soluzione $x = 0$ se $a = 1$. V F

**d.** ha soluzione $x = \frac{2(1-a)}{a}$ se $a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1$. V F

**329** ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $\frac{2x}{a} - 1 = \frac{2 - ax}{3a}$, nell'incognita $x$.

C.E.: $a \neq 0$.

Riduciamo allo stesso denominatore e moltiplichiamo i due membri per il denominatore comune:

$$\frac{6x}{3a} - \frac{3a}{3a} = \frac{2 - ax}{3a} \rightarrow 6x - 3a = 2 - ax \rightarrow (6 + a)x = 2 + 3a.$$

**Discussione**

Se $6 + a = 0$, cioè $a = -6$: $0 \cdot x = 2 + 3 \cdot (-6)$ → impossibile.

Se $6 + a \neq 0$ e $a \neq 0$ (per le C.E.): $x = \frac{2 + 3a}{6 + a}$ → determinata.

In sintesi: $a = 0$: perde significato; $a = -6$: impossibile; $a \neq 0 \wedge a \neq -6$: $x = \frac{2 + 3a}{6 + a}$.

**Risolvi le seguenti equazioni letterali nell'incognita $x$.**

**330** $\frac{x-1}{4a} - \frac{3}{2} = 0$ $[a = 0\text{: perde significato}; a \neq 0: x = 1 + 6a]$

**331** $\frac{x+3}{2b} - \frac{5}{3b} = 2$ $\left[b = 0\text{: perde significato}; b \neq 0: x = \frac{12b + 1}{3}\right]$

**332** $\frac{x}{a-1} = \frac{2x}{a+1} + 1$ $\left[a = \pm 1\text{: perde significato}; a = 3\text{: imp.}; a \neq 3 \wedge a \neq \pm 1: x = \frac{1 - a^2}{a - 3}\right]$

**333** $\frac{x}{a+3}+x=2$ $\left[a=-3\text{: perde significato; } a=-4\text{: imp.; } a\neq-3\wedge a\neq-4\text{: } x=\frac{2a+6}{4+a}\right]$

**334** $\frac{2}{b-4}-\frac{x}{4-b}=x$ $\left[b=4\text{: perde significato; } b=5\text{: imp.; } b\neq4\wedge b\neq5\text{: } x=\frac{2}{b-5}\right]$

**335** $\frac{3}{2k+4}+\frac{k}{k+2}=\frac{x}{2}$ $\left[k=-2\text{: perde significato; } k\neq-2\text{: } x=\frac{3+2k}{k+2}\right]$

**336** $\frac{b^2x+x-2}{b^3-b}+\frac{2b^2}{b-1}=\frac{x-1}{b+1}+\frac{2b^3+3}{b^2-b}$ $[b=0\vee b=\pm1\text{: perde significato; } b\neq0\wedge b\neq\pm1\text{: } x=5-b]$

## Equazioni letterali fratte

**337** **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo l'equazione $\frac{3x}{a-1}-\frac{a}{x-2}=\frac{3x^2-ax-5a}{(x-2)(a-1)}$, nell'incognita $x$.

**C.E. parametro: $a\neq1$; C.E. incognita: $x\neq2$.**

$\frac{3x^2-6x-a^2+a}{(a-1)(x-2)}=\frac{3x^2-ax-5a}{(a-1)(x-2)}$ ) ridotte le frazioni allo stesso denominatore, moltiplichiamo i due membri per il denominatore comune

$ax-6x=a^2-6a$

$(a-6)x=a(a-6)$ ) raccogliamo $x$ e scomponiamo il secondo membro

**Discussione**

Se $a=1\rightarrow$ l'equazione non ha significato. — per la C.E. del parametro

Se $a=6\rightarrow0\cdot x=0\rightarrow$ l'equazione è indeterminata, con $x\neq2$.

sostituiamo 6 ad $a$ — per la C.E. dell'incognita

Se $a\neq1\wedge a\neq6\rightarrow x=\frac{a(a-6)}{a-6}\rightarrow x=a$; per la C.E. dell'incognita deve essere $x\neq2$, quindi $a\neq2$.

In sintesi: $a=1$: l'equazione perde significato; $a=6$: l'equazione è indeterminata, con $x\neq2$; $a\neq1\wedge a\neq6\wedge a\neq2$: $x=a$.

**Risolvi le seguenti equazioni letterali nell'incognita $x$.**

**338** $\frac{2x-1}{x+3}+a=1$ $\left[a=-1\text{: imp.; } a\neq-1\text{: } x=\frac{4-3a}{1+a}\right]$

**339** $\frac{m+2}{x+1}=m+1$ $\left[m=-2\vee m=-1\text{: imp.; } m\neq-2\wedge m\neq-1\text{: } x=\frac{1}{m+1}\right]$

**340** $\frac{5a+x}{x-5}=0$ $[a=-1\text{: imp.; } a\neq-1\text{: } x=-5a]$

**341** $\frac{1}{2x}-\frac{b}{4}=\frac{x+b}{x}$ $\left[b=-4\vee b=\frac{1}{2}\text{: imp.; } b\neq-4\wedge b\neq\frac{1}{2}\text{: } x=\frac{2-4b}{4+b}\right]$

**342** $\frac{x}{x+a}-3a=0$ $\left[a=\frac{1}{3}\vee a=0\text{: imp.; } a\neq\frac{1}{3}\wedge a\neq0\text{: } x=\frac{3a^2}{1-3a}\right]$

**343** $\frac{a-2}{x+2}+\frac{a+1}{a-1}=\frac{3a-4}{x+2}$ $\left[a=1\text{: perde significato; } a=-1\text{: imp.; } a\neq\pm1\text{: } x=\frac{2a^2-6a}{a+1}\right]$

**344** $\frac{a+2}{x}-\frac{1}{a-2}=\frac{2-a}{x}+\frac{1}{a+2}$ $[a=\pm2\text{: perde significato; } a=0\text{: ind. } (x\neq0)\text{; } a\neq0\wedge a\neq\pm2\text{: } x=a^2-4]$

**345** $\frac{b}{x}-\frac{b}{2-x}+\frac{1}{x^2-2x}=0$ $\left[b=0\vee b=\pm\frac{1}{2}\text{: imp.; } b\neq0\wedge b\neq\pm\frac{1}{2}\text{: } x=\frac{2b-1}{2b}\right]$

**346** $\frac{3ax-2a}{4-2ax}=-\frac{3}{ax-2}$ $\left[a=0\text{: imp.; } a\neq0\text{: } x=\frac{2a+6}{3a}\right]$

**347** $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x+a+1}{x+a-1}$ [$a = -1$: imp.; $a \neq -1$: $x = -2a$]

**348** $\frac{b^2}{x^2-b^2} + \frac{b}{b-x} = \frac{b}{b+x}$ $\left[b = 0\text{: ind. } (x \neq 0);\ b \neq 0\text{: } x = \frac{b}{2}\right]$

**349** $\frac{x+2}{x-b} - \frac{2b+4}{x+2} = 1$ [$b = -2$: ind. $(x \neq -2)$; $b \neq -2$: $x = 2b+2$]

**350** $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{ax-1} = 0$ [$a = 1$: ind. $(x \neq 1)$; $a = -1$: imp.; $a \neq \pm 1$: $x = -1$]

## 5 Disequazioni fratte

▶ Teoria a p. 49

**351** VERO O FALSO?

a. $\frac{6}{5}$ appartiene all'insieme delle soluzioni di $\frac{x-2}{1-x} > 3$. V F

b. $\frac{x+2}{3} + \frac{1}{4} \geq 0$ è una disequazione fratta. V F

c. $-\frac{1}{x^2} < 0$ ha come insieme delle soluzioni $\mathbb{R}$. V F

d. L'insieme delle soluzioni di $\frac{x+2}{4-x} > 0$ è un intervallo limitato. V F

AL VOLO Risolvi le disequazioni senza eseguire calcoli.

**352** $\frac{8}{x} \geq 0$; $\frac{3}{2+x} \leq 0$.

**353** $\frac{-2}{x+1} > 0$; $\frac{\frac{1}{2}}{x-3} \leq 0$.

**354** $\frac{5}{x^2+1} > 0$; $-\frac{1}{x^2+2} > 0$.

**355** $\frac{4x^2}{x-1} > 0$; $-\frac{7}{x^3} > 0$.

### Disequazioni in forma normale

Risolvi le seguenti disequazioni.

**356** $\frac{x+6}{x-3} \geq 0$ $[x \leq -6 \vee x > 3]$

**357** $\frac{2x-1}{2x} > 0$ $\left[x < 0 \vee x > \frac{1}{2}\right]$

**358** $\frac{4-3x}{3+x} < 0$ $\left[x < -3 \vee x > \frac{4}{3}\right]$

**359** $\frac{7+14x}{x+5} \leq 0$ $\left[-5 < x \leq -\frac{1}{2}\right]$

**360** $-\frac{3}{12-4x} > 0$ $[x > 3]$

**361** $\frac{-5x}{3x-1} \leq 0$ $\left[x \leq 0 \vee x > \frac{1}{3}\right]$

**362** $\frac{10x-15}{4+x} < 0$ $\left[-4 < x < \frac{3}{2}\right]$

**363** $\frac{7-x}{9-x} \geq 0$ $[x \leq 7 \vee x > 9]$

**364** RIFLETTI SULLA TEORIA Le disequazioni $(3x+1)(x-2) \geq 0$ e $\frac{3x+1}{x-2} \geq 0$ sono equivalenti?

Risolvi le seguenti disequazioni scomponendo in fattori.

**365** $\frac{x^2+2x}{x^2-9} > 0$ $[x < -3 \vee -2 < x < 0 \vee x > 3]$

**366** $\frac{4x^2-1}{x^2+2x+1} < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right]$

**367** $\frac{x^2+5x+4}{x^3+x} \geq 0$ $[-4 \leq x \leq -1 \vee x > 0]$

**368** $\frac{3x^2-3x^3}{16-x^2} < 0$ $[x < -4 \vee 1 < x < 4]$

ESERCIZI

**369** ●○ $\frac{x^2-1}{2x^3-4x^2} < 0$ $[x < -1 \vee 1 < x < 2]$

**370** ●○ $\frac{4x-x^2}{x^2-4} \geq 0$ $[-2 < x \leq 0 \vee 2 < x \leq 4]$

**371** ●○ $\frac{x^2-4x+4}{x^2-16} < 0$ $[-4 < x < 4 \wedge x \neq 2]$

**372** ●○ $\frac{-3x^2-2x+16}{(2x+2)(x+5)} \geq 0$ $\left[-5 < x \leq -\frac{8}{3} \vee -1 < x \leq 2\right]$

**373** ●○ $\frac{4x^2+12x+9}{x^3-5x^2+6x} < 0$ $\left[x < 0 \vee 2 < x < 3 \wedge x \neq -\frac{3}{2}\right]$

**374** ●○ $\frac{x^2-x-2}{x(3-x)} > 0$ $[-1 < x < 0 \vee 2 < x < 3]$

**375** ●● $\frac{(x-3)(x^2-6x+8)}{3x^2-x} > 0$ $\left[0 < x < \frac{1}{3} \vee 2 < x < 3 \vee x > 4\right]$

**376** ●● $\frac{x^3+x^2-17x+15}{x^3-6x^2+12x-8} \leq 0$ $[-5 \leq x \leq 1 \vee 2 < x \leq 3]$

**377** ●○ **TEST** Le soluzioni della disequazione $\frac{4-4x^2}{1-x} \geq 0$ sono:

A $x \leq -1$ B $-1 \leq x < 1$ C $x \neq 1$ D $x \geq -1 \wedge x \neq 1$ E $x > -1 \wedge x \neq 1$

**378** ●○ **EUREKA!** **Solo lei** Una sola tra le seguenti disequazioni è impossibile: quale?

A $\frac{x^2-1}{1+x} \geq 0$ B $\frac{x^3-x^4}{1-x} \leq 0$ C $\frac{x-1}{x^2-x^3} \geq 0$ D $\frac{x^2(1-x)}{1-x} \geq 0$ E $\frac{x^2}{x^2+x^5} \leq 0$

## Disequazioni e funzioni

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

**379** ●○ $y = \sqrt{\frac{4x+1}{3-x}}$ $\left[-\frac{1}{4} \leq x < 3\right]$

**380** ●○ $y = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$ $[x < -1 \vee x > 1 \vee x = 0]$

**381** ●○ $y = \sqrt{\frac{3x^2+3x}{x-2}}$ $[-1 \leq x \leq 0 \vee x > 2]$

**382** ●○ $y = \sqrt{\frac{0,5+x}{2x^2+1}}$ $\left[x \geq -\frac{1}{2}\right]$

Trova il dominio e studia il segno delle seguenti funzioni.

**383** ●○ $y = -\frac{x}{x-1}$ $[D: x \neq 1, y > 0: 0 < x < 1]$

**384** ●○ $y = \frac{6x+3}{5x}$ $\left[D: x \neq 0; y > 0: x < -\frac{1}{2} \vee x > 0\right]$

**385** ●○ $y = \frac{x^2-7x}{x^2+1}$ $[D: \mathbb{R}; y > 0: x < 0 \vee x > 7]$

**386** ●○ $y = \frac{9x^2-4}{4-2x}$ $\left[D: x \neq 2; y > 0: x < -\frac{2}{3} \vee \frac{2}{3} < x < 2\right]$

**387** ●○ **YOU & MATHS** **A cost function** A cost function $C(x)$ returns the total cost of producing $x$ items, while the average cost function $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ gives the cost per item when $x$ items are produced. Suppose that the cost $C$, in dollars, to produce $x$ umbrellas for a local retailer is $C(x) = 80x + 150$, and some umbrellas are produced, so $x \geq 1$.

a. Find an expression for the average cost function $\overline{C}(x)$.

b. Solve $\overline{C}(x) < 100$ and interpret.

## Disequazioni da ridurre a forma normale

**388** CACCIA ALL'ERRORE

a. $\frac{x-4}{x} \geq 1 \rightarrow x-4 \geq 1 \wedge x \geq 1$

b. $\frac{1}{x} < 1 \rightarrow x < 1$

c. $\frac{x}{2x-1} > \frac{3}{5} \rightarrow x > 3 \wedge 2x-1 > 5$

d. $\frac{x+3}{x-2} \geq 0 \rightarrow x \leq -3 \vee x \geq 2$

**389** ESERCIZIO GUIDA Risolviamo la disequazione $\frac{1}{5} + \frac{6}{x-3} - \frac{7}{5x-15} \leq 0$.

Riduciamo le frazioni al mcm e sommiamo.

$$\frac{x-3}{5(x-3)} + \frac{6 \cdot 5}{5(x-3)} - \frac{7}{5(x-3)} \leq 0 \rightarrow \frac{x+20}{5(x-3)} \leq 0.$$

Studiamo il segno della frazione ottenuta.

Studiamo i segni del numeratore $N$ e del denominatore $D$, ponendo $N > 0$ e $D > 0$.

$N > 0 \rightarrow x + 20 > 0 \rightarrow x > -20$;
$D > 0 \rightarrow 5(x-3) > 0 \rightarrow x > 3$.

Compiliamo il quadro dei segni, aggiungendo la riga $\frac{N}{D}$, ottenuta con la regola dei segni.

La disequazione è verificata quando $\frac{N}{D} \leq 0$, quindi scegliamo come intervalli delle soluzioni le zone in cui la frazione è uguale a 0 o il segno è $-$:

$-20 \leq x < 3$.

### Risolvi le seguenti disequazioni.

**390** $\frac{4}{3x} \leq \frac{1}{9}$ $[x < 0 \vee x \geq 12]$

**391** $\frac{6x-5}{2-x} > -2 + \frac{4}{x-2}$ $\left[-\frac{3}{4} < x < 2\right]$

**392** $\frac{3x-5}{2x-6} > \frac{x}{x-3}$ $[x < 3 \vee x > 5]$

**393** $\frac{x-5}{2x-8} \leq \frac{1}{2}$ $[x > 4]$

**394** $\frac{4-x^2}{x} > \frac{1-2x}{2}$ $[0 < x < 8]$

**395** $\frac{x+5}{x+1} - 3 \leq -\frac{4x-1}{2x+2}$ $[x < -1]$

**396** $\frac{4}{3} > \frac{x-2}{2x-2} + \frac{1}{x-1}$ $\left[x < 1 \vee x > \frac{8}{5}\right]$

**397** $\frac{2+x}{4x-2} + \frac{1}{2x-1} + \frac{2x+4}{3-6x} \geq 0$ $\left[\frac{1}{2} < x \leq 4\right]$

**398** $\frac{13x+5}{2x+1} - 8 < 0$ $\left[x < -1 \vee x > -\frac{1}{2}\right]$

**399** $-\frac{3x}{2x+8} > \frac{10-4x}{x+4}$ $[x < -4 \vee x > 4]$

**400** $0 \leq \frac{x-1}{3x+4} - \frac{3x-2}{6x+8}$ $\left[-\frac{4}{3} < x \leq 0\right]$

**401** $-\frac{1}{x} - 3 \geq \frac{2x+1}{2x}$ $\left[-\frac{3}{8} \leq x < 0\right]$

**402** $\frac{3x+24}{4-x} \leq 3$ $[x \leq -2 \vee x > 4]$

**403** $-\frac{x}{x+2} - 1 > \frac{x-1}{x+2}$ $\left[-2 < x < -\frac{1}{3}\right]$

**404** $\frac{3}{x-1} - \frac{1}{3} > \frac{x}{3x-3}$ $[1 < x < 5]$

**405** $\frac{1}{x+6} - 2 \geq \frac{1}{3x+18}$ $\left[-6 < x \leq -\frac{17}{3}\right]$

**406** $-2 + \frac{3}{4x+5} > -\frac{10x}{12x+15}$ $\left[-\frac{3}{2} < x < -\frac{5}{4}\right]$

**407** $\frac{4}{2x-1} \leq \frac{3}{2x+1}$ $\left[x \leq -\frac{7}{2} \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right]$

**408** $4 + \frac{x}{x-2} \geq \frac{-26+12x}{3x-6}$ $\left[x \leq -\frac{2}{3} \vee x > 2\right]$

**409** $\frac{-8x}{-2x-6} - 3 < \frac{2x-12}{3+x}$ $[x < -3 \vee x > 3]$

**410** $\frac{x}{x+6} - \frac{12-14x}{x^2-36} \geq \frac{x}{x-6}$ $[x > -6 \wedge x \neq 6]$

**411** $\frac{6(x+1)}{9-x^2} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{3-x}$ $[x < 3 \wedge x \neq -3]$

**412** ●○ $\frac{x+2}{2x-5} - 1 - \frac{x-1}{5-2x} - \frac{x-2}{4x-10} \geq 0$ $\left[\frac{5}{2} < x \leq 14\right]$

**413** ●○ $\frac{2}{x^2-5x+4} + \frac{2-x}{4-x} > \frac{5-x}{1-x}$ $\left[1 < x < \frac{8}{3} \vee x > 4\right]$

**414** ●○ $\frac{x}{x+3} + \frac{x}{x-2} > \frac{8x-3}{x^2+x-6}$ $\left[x < -3 \vee \frac{1}{2} < x < 2 \vee x > 3\right]$

**415** ●○ $-\frac{5x-18}{x^2-3x-18} < -\frac{2}{6-x} - \frac{2x}{2x+6}$ $[-3 < x < 1 \vee 6 < x < 12]$

**416** ●○ $\frac{x}{x-1} - \frac{2(1-x)}{x^2-4x+3} \leq 0$ $[-1 \leq x < 1 \vee 2 \leq x < 3]$

**417** ●○ Data la funzione $f(x) = \frac{3x}{x+1} + \frac{1}{2}$, determina per quali valori di $x$ si ha: $f(x) \geq -1$. $\left[x < -1 \vee x \geq -\frac{1}{3}\right]$

**418** ●○ Considera le funzioni $f(x) = \frac{1}{3x+1} - \frac{1}{3}$ e $g(x) = \frac{x}{9x+3}$. Trova per quali valori di $x$ si ha: $f(x) \geq g(x)$. $\left[-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}\right]$

## Sistemi di disequazioni

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

**419** ●○ $\begin{cases} \frac{x+2}{x-6} \geq 0 \\ \frac{3x}{x+5} < 0 \end{cases}$ $[-5 < x \leq -2]$

**420** ●○ $\begin{cases} \frac{1-2x}{7x} > 0 \\ -\frac{1}{x+3} \geq 0 \end{cases}$ [impossibile]

**421** ●○ $\begin{cases} \frac{5x+10}{3x} < 1 \\ \frac{1}{x} > -2 \end{cases}$ $\left[-5 < x < -\frac{1}{2}\right]$

**422** ●○ $\begin{cases} \frac{x+1}{x} - 4 \geq 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{3}\right]$

**423** ●○ $\begin{cases} \frac{1}{x-2} + 1 > \frac{x}{2-x} \\ \frac{1}{x^2+4x+4} > 0 \end{cases}$ $\left[x < \frac{1}{2} \vee x > 2 \wedge x \neq -2\right]$

**424** ●○ $\begin{cases} \frac{3x-1}{x^2} \leq 0 \\ \frac{2x-5}{x+3} - 1 < 0 \end{cases}$ $\left[-3 < x \leq \frac{1}{3} \wedge x \neq 0\right]$

**425** ●○ $\begin{cases} 2 + \frac{5x}{4-x} < 0 \\ \frac{3x}{x^2+9} > 0 \end{cases}$ $[x > 4]$

**426** ●○ $\begin{cases} -\frac{3}{3-x} + \frac{1}{15-5x} \geq 0 \\ \frac{7x^2}{x-7} > 0 \end{cases}$ $[x > 7]$

**427** ●● $\begin{cases} \frac{2-x}{x+3} > \frac{2}{3} \\ \frac{3x-1}{2x-1} - \frac{3}{2} < \frac{5x}{2-4x} \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{5} < x < 0\right]$

**428** ●● $\begin{cases} \frac{2}{x+3} - 3 + \frac{x}{2x+4} < 0 \\ \frac{-x}{x-1} \geq 2 - \frac{3x-2}{4x-4} \end{cases}$ $\left[\frac{2}{3} \leq x < 1\right]$

**429** ●● $\begin{cases} \frac{6}{x} + 3 > 0 \\ \frac{9-4x^2}{x^2+5x+4} \geq 0 \end{cases}$ $\left[-4 < x < -2 \vee 0 < x \leq \frac{3}{2}\right]$

**430** ●● $\begin{cases} \frac{2}{x} \geq 1 \\ \frac{x^2-2x+1}{4x^2-2x} \leq 0 \end{cases}$ $\left[0 < x < \frac{1}{2} \vee x = 1\right]$

**431** ●○ EUREKA! Determina il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3x}} + 2\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}$. $[0 < x \leq 2]$

TUTOR matematica
Allenati con **15 esercizi interattivi** con feedback "hai sbagliato, perché..."
su.zanichelli.it/tutor3 risorsa riservata a chi ha acquistato l'edizione con tutor

# VERIFICA DELLE COMPETENZE ALLENAMENTO

## UTILIZZARE TECNICHE E PROCEDURE DI CALCOLO

### Frazioni algebriche

**1** ●○ **CACCIA ALL'ERRORE**

a. $\frac{3x}{(x^2+x)^2} = \frac{3x}{[x(x+1)]^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

b. $\frac{a^3+2a}{2x} = \frac{a(a^2+2)}{2x} = \frac{a^3}{x}$

c. $\frac{3a^2b+3a+1}{5a^3} = \frac{3a(ab+1)+1}{5a^{3\,2}}$

d. $\frac{y}{2y^3+y^2} = \frac{y^0}{y^2(2y+1)} = \frac{0}{y(2y+1)} = 0$

**2** ●○ **VERO O FALSO?**

a. $\frac{a}{b-a} + \frac{b}{a-b} = 0$ V F

b. $\frac{x+1}{a} \cdot (-a^2) \cdot \frac{1}{a(x+1)} = -1$ V F

c. $\frac{a+b}{x-y} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{y^2-x^2}\right)^{-1} = \frac{x+y}{b-a}$ V F

d. $\left(-\frac{a+b}{x}\right)^{-2} : \left(-\frac{x^2}{ax+bx}\right)^3 = a+b$ V F

---

**Semplifica le seguenti espressioni dopo aver determinato le condizioni di esistenza.**

**3** ●○ $\frac{z^2-3z-10}{z^4-16}$ $\left[\frac{z-5}{(z-2)(z^2+4)}\right]$

**4** ●○ $\frac{2x^2-5x-3}{x^3-3x^2+x-3}$ $\left[\frac{2x+1}{x^2+1}\right]$

**5** ●○ $\frac{x^3-x^2-5x+6}{2x^3+2x^2-6x}$ $\left[\frac{x-2}{2x}\right]$

**6** ●○ $\frac{a^2-a-6}{a^2-2a-8}$; $\frac{a^2-4ay+ax}{-4xy+x^2+ax}$; $\frac{x^2-10x+25}{x^2-8x+15}$. $\left[\frac{a-3}{a-4}; \frac{a}{x}; \frac{x-5}{x-3}\right]$

**7** ●○ $\frac{y+2}{x} - \frac{x+y}{xy-x} + \frac{1}{y-1}$ $\left[\frac{y^2-2}{x(y-1)}\right]$

**8** ●○ $4x - \frac{4x^2+1}{x} - \frac{4x^2+4x+1}{2x^2-x}$ $\left[-\frac{2(2x+3)}{2x-1}\right]$

**9** ●○ $\left(\frac{2}{a+1} + \frac{1}{4a} - \frac{1}{4a^2}\right) : \frac{(3a+1)^2}{24a^3+8a^2}$ $\left[\frac{2(3a-1)}{a+1}\right]$

**10** ●○ $\left(\frac{a+1}{a} - 2\right) \cdot \left[\left(\frac{a}{a-1} + a\right) : \frac{a^2-a}{a+1}\right]$ $\left[\frac{a+1}{1-a}\right]$

**11** ●○ $\left[\left(\frac{1}{a}+2\right) : \left(3-\frac{1}{a}\right)\right]^{-1} \cdot \frac{a}{9a^2-1}$ $\left[\frac{a}{(1+2a)(1+3a)}\right]$

**12** ●○ $\left[\left(\frac{1-y}{xy+x}\right)^{-2} + \frac{x^2}{y-1}\right] : \left(\frac{xy^2}{2}\right)^2$ $\left[\frac{4(3+y)}{y^3(1-y)^2}\right]$

**13** ●○ $(a+b)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{a^2b^2}{a^3+b^3}$ $\left[\frac{a^2b^2}{b-a}; \text{C.E.: } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b\right]$

**14** ●○ $\left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{2a^2}{a^2-1} - \frac{a+1}{1-a}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) : \left(1 + \frac{a}{2-a}\right)$ $\left[\frac{2-a}{a^2}\right]$

**15** ●○ $\frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{x^2-y^2} + \frac{2y}{(x+y)^2(x-y)}$ [0]

**16** ●○ $\frac{2}{b^2-b-2} + \frac{1}{b^2+3b+2} + \frac{1}{b^3+b^2-4b-4}$ $\left[\frac{3}{b^2-4}\right]$

**17** ●○ $\left(\frac{a^2}{4a^2+4ab+b^2}-\frac{a-b}{6a+3b}\right):\frac{a^3-b^3}{12a+6b}$ $\left[\frac{2}{(a-b)(2a+b)}\right]$

**18** ●○ $\frac{a^2-5a+6}{a^2+7a+6}:\left(\frac{2a+10}{a+1}-a-1\right)$ $\left[-\frac{a-2}{(a+6)(a+3)}\right]$

**19** ●○ $\left(1+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}\right)^{-3}:\left(\frac{2a+3}{a}+1\right):\frac{a^4}{27(a+1)^3}$ $\left[\frac{9a^3}{(a+1)^4}\right]$

**20** ●○ $\left(\frac{4b+3}{b-1}-2\right)^3\cdot\left(\frac{b^2+6}{2b+5}-1\right)+\left(\frac{2b}{b+1}-1\right)^{-1}$ $\left[\frac{4b^2+21b+26}{b-1}\right]$

**21** ●○ $\left(\frac{4x-8}{x^2-4x+3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x^3-3x^2+3x-1}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^2-6x+9}{2x^2-6x+4}\right)^{-2}$ $\left[\frac{2x-2}{(x-3)^2}\right]$

**22** ●○ $\left(\frac{1-y}{2y+1}+1\right):\left(\frac{-3y}{2y+1}-y+\frac{4y^2}{2y+1}\right)\cdot\frac{6y}{3y^2-12}$ $\left[\frac{1}{(y-2)^2}\right]$

**23** ●● $\frac{-2-2x^2}{x^5+x^4-x-1}+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x(x+1)}$ $\left[\frac{x^2+3x+1}{x(x+1)^2}\right]$

**24** ●● $\frac{x-3}{9-x^2}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2+4x-xy-4y}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{2x-2y}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

**25** ●● $\frac{3a+15}{a^3-a^2-4a+4}\cdot\frac{a^2-3a-10}{2a-8}\cdot\frac{a^3-6a^2+11a-6}{a^2-25}$ $\left[\frac{3(a-3)}{2(a-4)}\right]$

**26** ●● $\left[\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}\right):\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{x^2+1}\right)\right]\cdot\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)$ $\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]$

**27** ●● $\frac{x^2-8x+16-xy+4y}{3x^2+6x+12}\cdot\frac{x^3-8}{(x-4)^2-y^2}\cdot\frac{6}{x^2-6x+8}$ $\left[\frac{2}{x+y-4}\right]$

**28** ●● $\left(\frac{x+y}{xy}-\frac{2}{xy-y^2}+\frac{y}{x^2-xy}\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x-y}-\frac{4}{x^2y-xy^2}\right)$ $\left[\frac{x}{x+2}\right]$

### Equazioni fratte e letterali

Risolvi le seguenti equazioni.

**29** ●○ $\frac{5}{4-x}=\frac{6x+4}{16-x^2}+\frac{4}{4+x}$ [0]

**30** ●○ $\frac{3(3x+1)}{x+3}=5$ [3]

**31** ●○ $\frac{8}{x-2}=\frac{2}{x+9}+\frac{12}{x^2+7x-18}$ $\left[-\frac{32}{3}\right]$

**32** ●○ $\frac{2x-4}{x-4}-\frac{2x+2}{x+2}=\frac{1}{x-4}$ $\left[\frac{2}{5}\right]$

**33** ●○ $\frac{-3x-3}{5x}+\frac{x}{5}=\frac{x^2-3}{5x}$ [impossibile]

**34** ●○ $\frac{6}{9-x^2}+\frac{6}{3x-x^2}+\frac{9}{9x-x^3}=0$ $\left[-\frac{9}{4}\right]$

**35** ●○ $\frac{3x}{4-x}+1=\frac{-10}{2x-8}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

**36** ●○ $\frac{5}{x-1}+\frac{5}{4}+\frac{25}{4-4x}=0$ [2]

**37** ●○ $\frac{x^2+1}{x^2+x-6}-\frac{x+1}{x+3}=\frac{5+x}{2-x}+1$ [impossibile]

**38** ●○ $\frac{1-x}{x-2}+\frac{x+1}{x^2+2x+4}+\frac{x^3}{x^3-8}=0$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

**39** $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{2x+2}=\frac{2-2x}{2x^3+10x^2+8x}$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$

**40** $\frac{x^2-3x+4}{12-4x}+\frac{x}{4}+\frac{1}{x-3}=0$ [ind., $x\neq 3$]

**41** $\frac{x}{5}-\frac{5+2x}{5-x}-\frac{x+5}{5}=\frac{2x+20}{25-5x}$ $[-10]$

**42** $\frac{6}{x^2+x}+\frac{3}{x^2-x}=\frac{7}{1-x^2}$ $\left[\frac{3}{16}\right]$

**43** $\frac{x^2+3x+5}{x^2+2x+4}-\frac{2x+3}{x^3-8}=\frac{x-1}{x-2}$ $\left[-\frac{9}{5}\right]$

**44** $\frac{6x-1}{x^2-7x+10}+\frac{3x}{25-x^2}=\frac{x-4}{x^2+3x-10}+\frac{2}{x+5}$ $\left[\frac{45}{58}\right]$

**45** $\frac{x+2-\frac{9}{2}x^2}{8-x^3}+\frac{3}{2x-4}=\frac{4x-1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x-2}$ $\left[\frac{6}{7}\right]$

**46** TEST L'equazione $\frac{1}{a}-\frac{ax}{x+2}=\frac{a+1}{a(x+2)}$ nell'incognita $x$ è:

A determinata per $a=0$.
B indeterminata per $a=-1$.
C impossibile per $a=1$.
D determinata per $a=2$.
E indeterminata per $a=-2$.

**Risolvi le seguenti equazioni letterali nell'incognita $x$.**

**47** $(a^2+2)x+3a^2-9a+6=a(3x+a)-1$ $\left[a=1\text{: ind.; }a=2\text{: imp.; }a\neq 1\wedge a\neq 2\text{: }x=\frac{7-2a}{a-2}\right]$

**48** $a^4x-a^3+2a^2-9a^2x+15a=0$ $\left[a=0\vee a=-3\text{: ind.; }a=3\text{: imp.; }a\neq 0\wedge a\neq\pm 3\text{: }x=\frac{a-5}{a(a-3)}\right]$

**49** $(6k+2x)x^2+k^2(k-1+2x)=2(k+x)^3-4x$ $\left[k=-1\text{: ind.; }k=1\text{: imp.; }k\neq\pm 1\text{: }x=\frac{k^2}{4(1-k)}\right]$

**50** $k(kx-2)=x\left(k-\frac{1}{4}\right)$ $\left[k=\frac{1}{2}\text{: imp.; }k\neq\frac{1}{2}\text{: }x=\frac{8k}{(2k-1)^2}\right]$

## Disequazioni fratte

**Risolvi le seguenti disequazioni fratte.**

**51** $\frac{-\frac{2}{3}}{3-x}\leq 0$ $[x<3]$

**52** $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\geq 0$ $[x\geq -1\wedge x\neq 0]$

**53** $\frac{3}{x-\frac{2}{5}}-1-\frac{2x}{\frac{2}{5}-x}<0$ $\left[-\frac{17}{5}<x<\frac{2}{5}\right]$

**54** $\frac{2x-1}{x-3}+\frac{x-2}{-2x+6}\geq 0$ $[x\leq 0\vee x>3]$

**55** $\frac{4}{2-3x}\geq\frac{3}{4-x}$ $\left[-2\leq x<\frac{2}{3}\vee x>4\right]$

**56** $\frac{x-3}{2x-5}+\frac{x+2}{10-4x}+1>\frac{3}{6x-15}$ $\left[x<\frac{5}{2}\vee x>4\right]$

**57** $\frac{1}{1-2x}+\frac{x+2}{2x-1}>-1$ $\left[x<0\vee x>\frac{1}{2}\right]$

**58** ●○ $\frac{2x+1}{2x}+\frac{3}{x}\le\frac{x-4}{4x}$ $[-6\le x<0]$

**59** ●○ $\frac{x-3}{2x-1}+\frac{4}{6x-3}-1+\frac{x+3}{1-2x}>0$ $\left[-\frac{11}{6}<x<\frac{1}{2}\right]$

**60** ●○ $\frac{1}{x+1}-\frac{x+5}{x^2-1}<\frac{9}{4}-\frac{6}{x-1}$ $\left[x<-1\vee-\frac{1}{3}<x<1\vee x>3\right]$

**61** ●○ $\frac{x+2}{2x-2}+\frac{2x^2-3}{x^2-1}<\frac{5x+3}{2x+2}$ $\left[x<-1\vee\frac{1}{5}<x<1\right]$

**62** ●○ $\frac{x-1}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}\le\frac{1-x}{(x+1)^2}$ $[x<1\wedge x\neq-1]$

**63** ●○ $\frac{16x}{6x-6}-3\le\frac{2x-12}{3-3x}$ $[1<x\le3]$

**64** ●● $\frac{5x-2(2+x)+21}{2x+8}+\frac{x-4}{x+4}-2>0$ $[x<-4\vee x>7]$

**65** ●● $\frac{32-18x^2}{(x^2+6x+9)(x^2-5x-14)}\le0$ $\left[x<-2\vee-\frac{4}{3}\le x\le\frac{4}{3}\vee x>7\wedge x\neq-3\right]$

**Risolvi i seguenti sistemi.**

**66** ●○ $\begin{cases}\frac{x+3}{2-x}>0\\-3x-9\le0\end{cases}$ $[-3<x<2]$

**67** ●○ $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{5}{2x}<3\\\frac{(x-5)^2 4x^3}{(4-x)^3}\ge0\end{cases}$ $[0<x<4\vee x=5]$

## RISOLVERE PROBLEMI

### Frazioni algebriche

**68** ●○ Data la funzione $f(x)=\frac{x^2-x}{1-3x^2}$, calcola:

a. $[f(-1)+f(2)]\cdot13^{-1}$;

b. $[f(3^{-1})]^{-2}-\frac{f(1)}{5}$.

$\left[\text{a) }-\frac{1}{11}\text{; b) }9\right]$

**69** ●○ Data la funzione $f(x)=\frac{x^3-x^2-2x}{2x+2x^2}$:

a. determina il dominio;

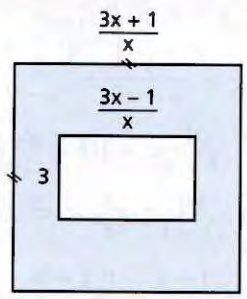
b. semplifica l'espressione analitica di $f(x)$;

c. trova gli zeri;

d. trova i valori di $x$ per i quali la funzione è positiva.

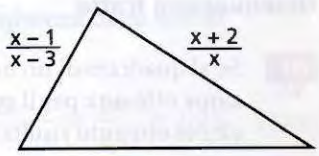
$\left[\text{a) }x\neq0\wedge x\neq-1\text{; b) }f(x)=\frac{x-2}{2}\text{; c) }2\text{; d) }x>2\right]$

**70** ●● Calcola l'area della parte colorata della figura.




$\left[\frac{9x+1}{x^2}\right]$

**71** ●○ Il perimetro del triangolo in figura è $\frac{2(x-1)}{x-3}$. Trova il lato mancante.




$\left[\frac{6}{x(x-3)}\right]$

**72** ●● Considera le due frazioni algebriche $\frac{k+1}{k}$ e $\frac{1-k}{k^2-1}$.

a. Per quali valori di $k$ esse perdono significato?

b. Determina il valore di $k \in \mathbb{Q}$ tale che il prodotto delle due frazioni sia uguale a 4.

c. Esiste un valore di $k$ per il quale il prodotto delle due frazioni è uguale a 1?

[a) $0, \pm 1$; b) $-\frac{1}{4}$; c) $k = -1$ non accettabile]

## Equazioni fratte

**73** ●○ Trova il dominio della funzione $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$ e

a. semplifica la sua espressione;

b. determina per quale valore di $x$ si ha $f(x) = 3$.

[a) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$; b) $-\frac{7}{2}$]

**74** ●○ Date le funzioni $f(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{2}{x}$ e $g(x) = \frac{3x}{x^2-4x-5}$:

a. determina il loro dominio;

b. trova gli zeri di $f(x)$;

c. calcola il valore di $x$ per il quale $f(x) = g(x)$.

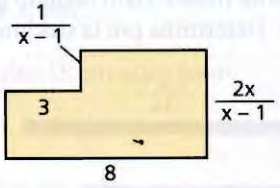
[a) $D_f$: $x \neq 5 \wedge x \neq 0$, $D_g$: $x \neq -1 \wedge x \neq 5$; b) $\frac{10}{3}$; c) $-\frac{10}{7}$]

**75** ●○ Determina il numero che bisogna aggiungere al numeratore e al denominatore di $\frac{1}{3}$ per ottenere una frazione equivalente a $\frac{2}{3}$. [3]

**76** ●○ Trova, se esistono, i numeri naturali pari il cui reciproco è uguale al doppio del reciproco del numero pari successivo. [2]

---

**77** ●○ Considera la figura sotto.




a. Esprimi l'area della figura.

b. Per quale valore di $x$ l'area vale 29?

[a) $\frac{16x-3}{x-1}$; b) 2]

**78** ●○ **Rapporti** Determina tre numeri pari consecutivi, sapendo che il rapporto tra la loro somma diminuita di 5 e il doppio della somma dei loro successivi diminuito di 3 è uguale a $\frac{1}{3}$.

**79** ●● **Funzioni a confronto** Considera le funzioni $f(x) = \frac{3}{2x} - \frac{1}{x+1}$ e $g(x) = \frac{x^2+1}{(x^2+x)(2x-1)}$.

a. Determina il loro dominio.

b. Individua gli eventuali zeri di $f(x)$ e di $g(x)$.

c. Calcola per quale valore di $x$ si ha $f(x) = g(x)$.

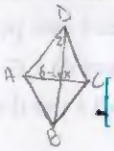
**80** ●● In un trapezio rettangolo $ABCD$ il lato obliquo $BC$ supera di 3 cm i $\frac{2}{5}$ della base maggiore $AB$ e la differenza delle basi è 5 cm. Sapendo che il rapporto fra la differenza tra la base maggiore e il lato obliquo e il doppio della differenza tra la base minore e il lato obliquo è $\frac{6}{7}$, determina il perimetro e l'area del trapezio.

## Disequazioni fratte

**81** ●○ Se al quadrato di un numero $k$ si aggiunge il doppio del quadrato della somma di $k$ con 3 e si divide l'espressione ottenuta per il prodotto della somma per la differenza del numero $k$ con 2, per quali valori di $k$ il quoziente ottenuto risulta maggiore o uguale a 3?

$\left[-\frac{5}{2} \leq k < -2 \vee k > 2\right]$

**82** ●● Sapendo che la diagonale $AC$ di un rombo misura $6 - 4x$ e che la diagonale $BD$ misura 2, trova per quali valori di $x$:

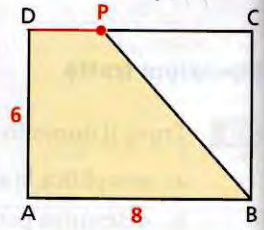



a. l'area è minore di 4;

b. il rapporto fra $BD$ e $AC$ è minore di $\frac{1}{3}$.

$\left[a)\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2};\ b)\ x < 0\right]$

**83** ●● Sul lato $DC$ del rettangolo $ABCD$ in figura considera un punto $P$.



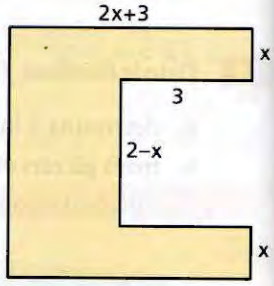

a. Posto $\overline{DP} = x$, quali valori può assumere $\overline{DP}$?

b. Quali valori può assumere $x$ affinché l'area del trapezio $ABPD$ non superi i $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo $ABCD$?

c. Quali valori può assumere $x$ affinché $\frac{\overline{DP}}{\overline{PC}} \leq 2$?

**84** ●● Utilizzando i dati indicati, determina per quali valori di $x$ il perimetro è minore di 48.

$[0 < x < 2]$

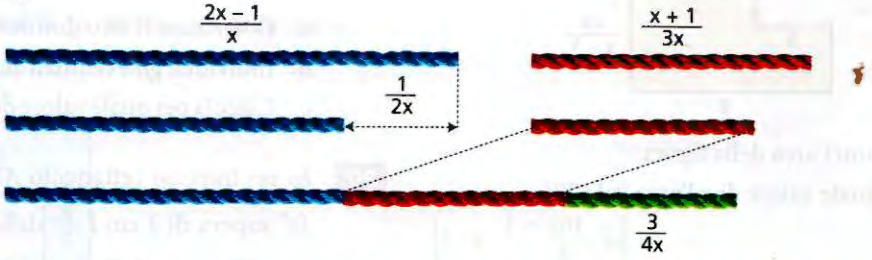



## COSTRUIRE E UTILIZZARE MODELLI

### RISOLVIAMO UN PROBLEMA

# La corda tricolore

Alla corda blu e alla corda rossa in figura vengono tagliati due tratti; poi le corde vengono congiunte tra loro, insieme a una corda verde. Osservando la figura e sapendo che alla corda rossa è stato tagliato un tratto lungo la metà di quello tagliato alla blu, calcola la misura della corda tricolore. Determina poi la sua lunghezza, sapendo che, in metri, $x = 8$.




► **Determiniamo la misura finale della corda blu.**

La corda blu misura $\frac{2x-1}{x}$ e ne tagliamo un tratto che misura $\frac{1}{2x}$, quindi la sua misura finale è $\frac{2x-1}{x} - \frac{1}{2x}$.

► **Determiniamo la misura finale della corda rossa.**

Il tratto tagliato nella corda rossa è: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{4x}$.

Quindi per la corda rossa otteniamo: $\frac{x+1}{3x} - \frac{1}{4x}$.

▶ **Calcoliamo la misura della corda tricolore.**

Sommiamo le misure delle tre corde:

$$\left(\frac{2x-1}{x}-\frac{1}{2x}\right)+\left(\frac{x+1}{3x}-\frac{1}{4x}\right)+\frac{3}{4x}=$$

$$\frac{24x-12-6+4x+4-3+9}{12x}=$$

$$\frac{28x-8}{12x}=\frac{4(7x-2)}{12x}=\frac{7x-2}{3x}.$$

▶ **Determiniamo la lunghezza della corda tricolore.**

Se $x = 8$, otteniamo: $\frac{7\cdot 8-2}{3\cdot 8}=\frac{54}{24}=2{,}25$.

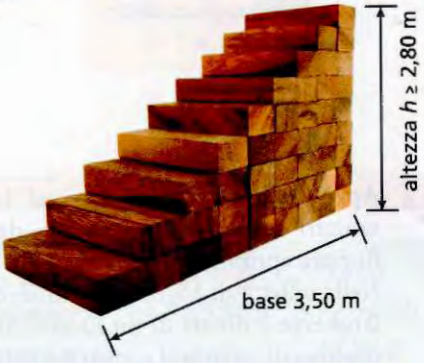
La lunghezza della corda tricolore è 2,25 m.

**85** ●● **In biblioteca** Lungo la strada rettilinea lunga 1000 m che congiunge le abitazioni di Camilla e Marta c'è una biblioteca, che dista $l$ metri dalla casa di Camilla. Se le ragazze escono di casa nello stesso momento per incontrarsi in biblioteca, camminano alla stessa velocità e Camilla aspetta Marta per 2 minuti, quanti minuti impiega Marta per raggiungere la destinazione?
(La biblioteca è più vicina a casa di Camilla che a casa di Marta.) $\left[t=\frac{1000-l}{500-l}\text{ minuti, con } 0<l<500\right]$

**RISOLVIAMO UN PROBLEMA**

## La scala

Livio deve progettare una scala per salire in solaio. La normativa prevede che la somma tra il doppio dell'altezza del gradino e la pedata (cioè la profondità del gradino) sia compresa tra i 62 e i 64 cm.




Per la base e l'altezza della scala osserva la figura.

- Se l'altezza del gradino è 18 cm, quanto può essere profonda la pedata in base alla normativa?
- Si può ottenere una scala a norma, se il gradino è alto 18 cm?

▶ **Troviamo quanto può essere profonda la pedata se l'altezza è 18 cm.**

Indichiamo con $A$ l'altezza del gradino e con $P$ la pedata (entrambi in cm); per la normativa deve essere:

$$62 \leq 2A + P \leq 64.$$

Con il gradino alto 18 cm otteniamo:

$$62 \leq 2\cdot 18 + P \leq 64 \rightarrow$$

$$62 - 36 \leq P \leq 64 - 36 \rightarrow$$

$$26 \leq P \leq 28.$$

▶ **Consideriamo la scala di Livio.**

Sappiamo che l'altezza della scala deve essere almeno

2,80 m = 280 cm

e la lunghezza della base deve essere

3,50 m = 350 cm.

▶ **Scegliamo come incognita la profondità del gradino.**

Se indichiamo con $x$ la profondità del gradino, il numero dei gradini è dato da $\frac{350}{x}$; otteniamo perciò la disequazione:

$$\frac{350}{x}\cdot 18 \geq 280 \rightarrow \frac{315}{x} \geq 14 \rightarrow$$

$$\frac{315-14x}{x} \geq 0,$$

da cui, essendo $x > 0$, otteniamo:

$$315 - 14x \geq 0 \rightarrow 14x \leq 315 \rightarrow x \leq \frac{315}{14},$$

con $\frac{315}{14} = 22{,}5$.

▶ **Confrontiamo il risultato ottenuto con la normativa vigente.**

La pedata del gradino risulta troppo corta (per essere a norma deve essere almeno di 26 cm), quindi non si può costruire una scala a norma con gradini alti 18 cm.

**86** ●● **La lente d'ingrandimento** Una nonna non riesce a leggere i piccoli caratteri del quotidiano nemmeno con gli occhiali e prova con una lente d'ingrandimento trovata in un cassetto: l'immagine che vede varia a seconda della distanza tra la lente e il giornale. Il nipote consulta il suo manuale di fisica e scopre che la distanza focale $f$ della lente, la distanza $p$ tra l'oggetto e la lente e la distanza $q$ tra la lente e l'immagine sono legate dalla legge:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}.$$

Nel caso della lente di ingrandimento, l'immagine è virtuale e la distanza $q$ si deve considerare negativa.

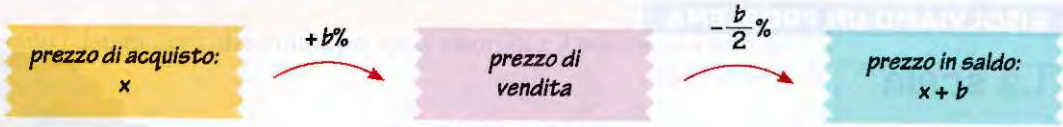
a. Ricava $p$ dalla formula precedente.

b. La distanza focale della lente trovata è di 25 cm. Supponendo che la distanza tra lente e immagine sia di 40 cm ($q=-40$), quanto vale la distanza $p$ tra il giornale e la lente?

c. Se la posizione di lettura più comoda per la nonna prevede una distanza lente-immagine di 55 cm e una distanza lente-giornale di 15 cm, che distanza focale deve avere una lente d'ingrandimento ottimale?

[b) $p\simeq 15{,}4$ cm; c) $f\simeq 20{,}6$ cm]

**87** ●● **Il guadagno rimane** Un negoziante compra un articolo a un prezzo $x$, quindi lo rivende dopo averlo aumentato di prezzo e poi a fine stagione lo mette in saldo come indicato nello schema. Determina $x$.



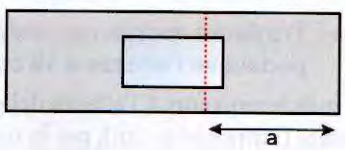

$\left[b\neq 0\wedge b\neq 100;\ x=\frac{20\,000}{100-b}\right]$

**88** ●● **Aprite le finestre, è primavera!** La normativa sui «requisiti igienico-sanitari dei locali d'abitazione» definisce la superficie minima per le finestre apribili delle stanze.

Nella villetta di Mattia, la mansarda di 20 m di lunghezza per 6 m di larghezza è dotata di un lucernario apribile (lungo 6 m e largo 3 m), posto esattamente al centro del soffitto.

Mattia vorrebbe alzare un muro separatore per suddividere la mansarda in una sala più grande e uno studio più piccolo, rispettando il vincolo di illuminazione per mantenere l'abitabilità del locale.

**rapporto aeroilluminante = rapporto tra superficie della finestra e superficie del pavimento** $\geq \frac{1}{8}$




a. Scrivi, in funzione di $a$, le espressioni che rappresentano le superfici dello studio, della sala e delle finestre corrispondenti.

b. 1. Calcola il rapporto tra la superficie della finestra e la superficie del pavimento dello studio.
2. Per quali valori di $a$ tale rapporto rispetta la normativa?

c. 1. Calcola il rapporto tra la superficie della finestra e la superficie del pavimento della sala.
2. Per quali valori di $a$ tale rapporto rispetta la normativa?

d. Per quali valori di $a$ Mattia ottiene due stanze che rispettano entrambe la normativa?

TUTOR matematica
Allenati con **15 esercizi interattivi** con feedback "hai sbagliato, perché..."
**su.zanichelli.it/tutor3** risorsa riservata a chi ha acquistato l'edizione con tutor

# VERIFICA DELLE COMPETENZE PROVE

1 ora

## PROVA A

**Semplifica le seguenti espressioni, dopo aver determinato le condizioni di esistenza.**

**1** $\dfrac{3x+6y}{x^2-2xy+y^2}:\left(\dfrac{2x+y}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x+y}\right)$

**2** $\left(\dfrac{3x-4y}{x}+\dfrac{x-3y}{y}\right)\cdot\left(-x+\dfrac{x+2xy}{2y^2-xy}:\dfrac{1}{y}\right)$

**Risolvi l'equazione e la disequazione seguenti.**

**3** $\dfrac{4}{4-x^2}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x^2-4x+4}$

**4** $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}+1<\dfrac{2x-1}{x-3}$

**5** Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^3-3x^2}$:

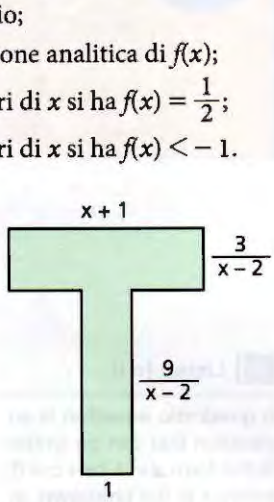
a. determina il dominio;

b. semplifica l'espressione analitica di $f(x)$;

c. trova per quali valori di $x$ si ha $f(x)=\frac{1}{2}$;

d. trova per quali valori di $x$ si ha $f(x)<-1$.

**6** Determina per quale valore di $x$ l'area della figura vale 12.




## PROVA B

**1** **1 su 1000?** Un indicatore del livello di assistenza sanitaria è il numero di posti letto per abitante.

| | Marche | Lazio |
|---|---|---|
| residenti | 1 565 335 | 5 728 688 |
| posti letto | 5635 | 22 342 |

(dati Istat 2009)

a. Calcola il numero di posti letto disponibili ogni mille abitanti nelle due regioni indicate a lato.

b. Se $x$ è il numero di posti letto disponibili e $y$ il numero di abitanti, indica con quale operazione si calcola il numero di posti letto per mille abitanti.

c. Se calcoli $\dfrac{y}{x}$, quale informazione ottieni?

d. Il numero di posti letto per mille abitanti resta lo stesso se il numero di abitanti aumenta di 1000 unità e il numero di letti aumenta di 1?

e. Come varia il rapporto se il numero di abitanti aumenta di 1000, mentre resta costante il numero di posti letto? E se, a parità di abitanti, diminuisce di 1 il numero di posti letto?

**2** **Quante fotocopie!** Una fotocopiatrice produce copie a un costo unitario $p$, in euro, che varia in funzione del numero di copie $k$ secondo la formula:

$$p=\frac{k+30000}{20k}.$$

a. Quante devono essere le copie prodotte perché il costo di una copia sia di 8 centesimi?

b. È possibile che il costo unitario risulti uguale a 5 centesimi?

c. Se vengono prodotte 60 000 fotocopie, qual è la spesa complessiva?