CAPITOLO 1

DIVISIONE FRA POLINOMI E SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

1 Divisione fra polinomi

Nell'insieme dei numeri naturali la divisione è possibile se il dividendo è un multiplo del divisore; si dice allora che il dividendo è divisibile per il divisore. 6 è divisibile per 3 perché $3 \cdot 2$ dà come prodotto 6. Procediamo in modo analogo per i polinomi.

Listen to it

A polynomial A is **divisible** by a polynomial B, that is *different from zero*, if there exists a polynomial Q such that A equals B times Q.

DEFINIZIONE

Un polinomio A è **divisibile per un polinomio** B se esiste un polinomio Q che, moltiplicato per B, dà come prodotto A.

$$A : B = Q \quad \rightarrow \quad B \cdot Q = A.$$

A è il dividendo, B il divisore, Q il quoziente.

ESEMPIO

$A = 2x^7 + x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 4$ è divisibile per $B = 2x^2 + 1$.

Infatti, esiste il polinomio $Q = x^5 - 3x + 4$ tale che

$$(2x^2 + 1)(x^5 - 3x + 4) = 2x^7 - 6x^3 + 8x^2 + x^5 - 3x + 4.$$

Il grado del polinomio quoziente

Sappiamo che il grado di $B \cdot Q$ è la somma del grado di B e del grado di Q: dunque, poiché $B \cdot Q = A$, se A è di grado n e B è di grado p, il grado di Q deve essere $n - p$, con $n \geq p$.

Nell'esempio precedente, A è di grado 7, B di grado 2, Q di grado $7 - 2 = 5$.

Se il divisore è un monomio

▶ Esercizi a p. 13

▶ Spiega perché $a^2 + a + 1$ non è divisibile per a^3.

DEFINIZIONE

Un polinomio è **divisibile per un monomio** non nullo se ogni suo termine è divisibile per tale monomio.

Quando un polinomio è divisibile per un monomio, il quoziente è il polinomio che otteniamo applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione: dividiamo ciascun termine del polinomio per il monomio.

ESEMPIO

$$(5a^6 - 6a^4) : 2a^2 = 5a^6 : 2a^2 - 6a^4 : 2a^2 = \frac{5}{2}a^4 - 3a^2$$ $2a^2 = 5a^6 - 6a^4$

▸ Calcola:
$\left(\frac{7}{3}a^3b^2 + \frac{1}{2}a^2b - 5b\right) : b.$

Se il divisore è un polinomio

▸ Esercizi a p. 14

Analogamente a quanto succede nell'insieme dei numeri naturali, possiamo eseguire la divisione fra due polinomi anche se uno non è divisibile per l'altro.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

$14 = 3 \cdot 4 + 2$

Dati due polinomi A e B in una sola variabile, con il grado di B minore o uguale al grado di A, si può dimostrare che è sempre possibile ottenere due polinomi Q e R tali che:

$$A = B \cdot Q + R,$$

dove Q è il polinomio quoziente e R il polinomio resto.

Il grado di Q è la differenza fra il grado di A e il grado di B; il grado di R è minore del grado di B.

Nel caso particolare in cui $R = 0$, si ha $A = B \cdot Q$, ossia A è divisibile per B.

Vediamo con un esempio la tecnica per eseguire la divisione tra due polinomi.

APPROFONDIMENTO

La divisione in colonna La regola per la divisione in colonna di polinomi è una generalizzazione di quella fra numeri naturali.

▸ Fai vedere l'analogia fra i due procedimenti con $865 : 41$ e $(8x^2 + 6x + 5) : (4x + 1)$.

La risposta

ESEMPIO

Dividiamo $A = 13x^2 + 6x^3 + 6 + 5x$ per $B = 2 - x + 3x^2$.

Per eseguire la divisione, ordiniamo A e B secondo le potenze decrescenti della variabile: $(6x^3 + 13x^2 + 5x + 6) : (3x^2 - x + 2)$.

$$\begin{array}{l|l} \overbrace{6x^3 + 13x^2 + 5x + 6}^{A} & \overbrace{3x^2 - x + 2}^{B} \\ \hline & \underbrace{2x}_{Q_1} \end{array}$$

a. Dividiamo $6x^3$ per $3x^2$ e scriviamo il quoziente parziale $Q_1 = 2x$.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6 & 3x^2 - x + 2 \\ \hline \underbrace{-6x^3 + 2x^2 - 4x}_{-Q_1 \cdot B} & 2x \end{array}$$

b. Moltiplichiamo $2x$ per B e scriviamo con il segno cambiato i risultati incolonnati, rispetto al grado, con i termini di A.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6 & 3x^2 - x + 2 \\ \hline -6x^3 + 2x^2 - 4x & 2x \\ \hline /\!/ \quad \underbrace{15x^2 + x + 6}_{R_1} & \end{array}$$

c. Sommiamo in colonna i termini, ottenendo un primo resto parziale, R_1.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6 & 3x^2 - x + 2 \\ \hline -6x^3 + 2x^2 - 4x & 2x \underbrace{+5}_{Q_2} \\ \hline /\!/ \quad 15x^2 + x + 6 & \end{array}$$

d. Ripetiamo il procedimento considerando R_1. Dividiamo $15x^2$ per $3x^2$, ottenendo $Q_2 = 5$.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6 & 3x^2 - x + 2 \\ \hline -6x^3 + 2x^2 - 4x & 2x + 5 \\ \hline /\!/ \quad 15x^2 + x + 6 & \\ \underbrace{-15x^2 + 5x - 10}_{-Q_2 \cdot B} & \end{array}$$

e. Moltiplichiamo 5 per B e scriviamo i prodotti, con il segno cambiato, in colonna sotto R_1.

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6 & 3x^2 - x + 2 \\ \hline -6x^3 + 2x^2 - 4x & \underbrace{2x + 5}_{Q} \\ \hline /\!/ \quad 15x^2 + x + 6 & \\ -15x^2 + 5x - 10 & \\ \hline /\!/ \quad \underbrace{6x - 4}_{R} & \end{array}$$

f. Sommiamo in colonna i termini. Il grado di $R = 6x - 4$ è minore del grado di B: la divisione è terminata.

▶ Determina quoziente e resto di $(a^3+2a):(2+a)$ tenendo conto che il dividendo non è un polinomio completo: nello schema devi scriverlo con spazi vuoti per le potenze mancanti. Esegui poi la verifica.

Animazione

Verifica

Dobbiamo verificare che $A = B \cdot Q + R$. Calcoliamo:

$$B \cdot Q + R = (3x^2 - x + 2)(2x + 5) + (6x - 4) =$$
$$6x^3 + 15x^2 - 2x^2 - 5x + 4x + 10 + 6x - 4 =$$
$$6x^3 + 13x^2 + 5x + 6.$$

Il risultato ottenuto coincide con il dividendo:

$$A = 6x^3 + 13x^2 + 5x + 6.$$

2 Regola di Ruffini

▶ Esercizi a p. 17

Quando il **polinomio divisore** è un binomio del tipo $x - a$, dove a è un numero reale qualunque, per determinare il quoziente Q e il resto R possiamo utilizzare un procedimento rapido, detto *regola di Ruffini*.

ESEMPIO

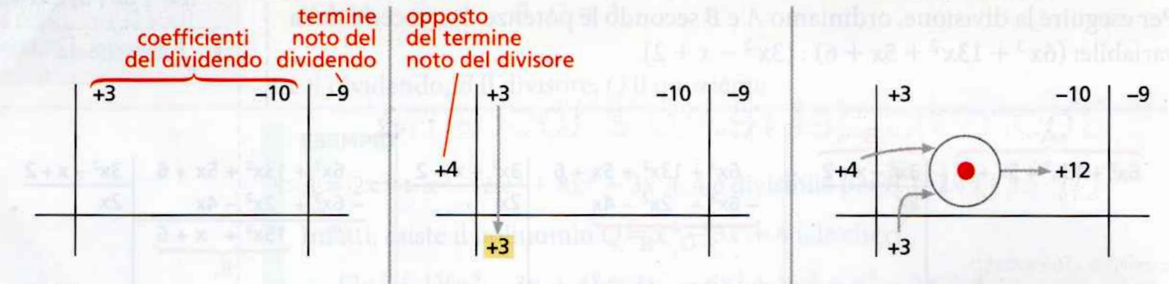
Eseguiamo la divisione $(-10x - 9 + 3x^2) : (x - 4)$.

La regola di Ruffini

Scriviamo i polinomi in ordine decrescente rispetto alle potenze della x:

$$(3x^2 - 10x - 9) : (x - 4).$$

La figura illustra come si applica la regola di Ruffini.



a. Scriviamo su una riga, nell'ordine, i coefficienti dei termini del polinomio dividendo, + 3 e − 10, e il termine noto − 9. Tracciamo due linee verticali, una a sinistra del primo coefficiente e una fra l'ultimo e il termine noto. Lasciamo una riga vuota e tracciamo una linea orizzontale.

b. A sinistra della prima linea verticale, sulla seconda riga, scriviamo + 4, ossia l'opposto del termine noto del polinomio divisore $x - 4$. Abbassiamo + 3, ossia il primo coefficiente del dividendo: esso è anche il primo coefficiente del quoziente.

c. Moltiplichiamo + 3 per + 4 e scriviamo il risultato nella colonna successiva a + 3, ossia sotto − 10.

d. Sommiamo − 10 e + 12 e scriviamo il risultato nella stessa colonna, sotto la linea orizzontale. + 2 è il secondo coefficiente del quoziente.

e. Ripetiamo il procedimento, moltiplicando + 2 per + 4 e scrivendo il risultato nella colonna a destra di + 2, sopra la riga orizzontale.

f. Sommiamo − 9 e + 8 e scriviamo il risultato nella stessa colonna, sotto la linea orizzontale. − 1 è il resto.

Scrittura del quoziente
I coefficienti del polinomio quoziente sono 3 e 2. Tenendo conto che il dividendo ha grado 2 e il divisore ha grado 1, il quoziente deve avere grado 1. Quindi possiamo scrivere:

$$Q = 3x + 2; \qquad R = -1.$$

Verifica
Per verificare che il risultato è esatto, controlliamo che $A = B \cdot Q + R$:

$$3x^2 - 10x - 9 = (x-4)(3x+2) + (-1).$$

In generale, dividendo un polinomio $A(x)$ di grado n per il binomio $x - a$, di primo grado, otteniamo per quoziente un polinomio $Q(x)$ di grado $n - 1$.

Se il divisore è del tipo $x + a$, osserviamo che: $x + a = x - (-a)$.

ESEMPIO

$$(8x^2 + 2x - 3) : (x + 2) = (8x^2 + 2x - 3) : [x - (-2)].$$

Si può dunque applicare la regola di Ruffini.

Nella tabella che abbiamo usato nella divisione della pagina precedente abbiamo scritto in riga i coefficienti del dividendo $3x^2 - 10x - 9$, cioè 3, -10 e -9.

Se il polinomio dividendo fosse stato incompleto, al posto di ogni coefficiente mancante avremmo dovuto inserire uno 0. Per esempio, per il polinomio dividendo $2x^4 - x^2 - 1$, i coefficienti da disporre in riga sono: 2, 0, -1, 0, -1.

▶ Esegui con la regola di Ruffini
$\left(\frac{1}{3}x^5 - x^3 - 2x^2 - 6\right) : (x - 3)$.

Animazione

Video

L'economia della regola di Ruffini La regola di Ruffini sintetizza il procedimento visto nel paragrafo precedente.
Esegui la divisione $(3x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 10) : (x - 3)$ con i due metodi che conosci.
Confrontali e, in particolare, individua nei due schemi gli stessi coefficienti.

3 Teorema del resto e teorema di Ruffini

▶ Esercizi a p. 23

Teorema del resto

Consideriamo ancora la divisione già esaminata

$$(3x^2 - 10x - 9) : (x - 4),$$

che ha quoziente $3x + 2$ e resto -1.

Calcoliamo il valore che assume il polinomio dividendo $3x^2 - 10x - 9$ per $x = 4$, cioè per x uguale all'opposto del termine noto del divisore:

$$3(4)^2 - 10 \cdot 4 - 9 = -1.$$

Il resto della divisione coincide con il valore assunto dal polinomio per $x = 4$.
In generale, vale il seguente teorema.

TEOREMA
Teorema del resto
Nella divisione tra polinomi $A(x) : (x - a)$, il resto è dato dal valore che assume $A(x)$ quando alla variabile x si sostituisce il valore a:

$$R = A(a).$$

TEORIA

DIMOSTRAZIONE

Se la divisione $A(x) : (x - a)$, ha quoziente $Q(x)$ e resto R, possiamo scrivere:

$$A(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

Sostituendo a x il valore a, otteniamo:

$$A(a) = (a - a)Q(a) + R.$$

Essendo $a - a = 0$, il prodotto $(a - a)Q(a)$ si annulla, quindi:

$$A(a) = R.$$

Se il divisore è $x - 3$, il valore di a da sostituire a x è 3; se il divisore è $x + 2$, allora $a = -2$.

ESEMPIO

Calcoliamo il resto della divisione

$$(-x^4 + 3x^2 - 5) : (x + 2).$$

Poiché $x + 2 = x - (-2)$, abbiamo che $R = A(-2)$:

$$R = -(-2)^4 + 3(-2)^2 - 5 = -9.$$

▸ Calcola il resto senza eseguire le divisioni: $(b^6 + 3b^3 - 6) : (b - 1)$; $(x^2 - 4x + 9) : (x + 3)$.

Teorema di Ruffini

Esaminiamo il seguente ragionamento.

Se il polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ è divisibile per $x + 5$, allora la divisione $(x^3 + 2x^2 - 13x + 10) : (x + 5)$ dà resto 0; quindi, per il teorema del resto, $A(-5) = 0$.

Il ragionamento è invertibile.

Dato il polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$, se $A(-5) = 0$, allora la divisione $(x^3 + 2x^2 - 13x + 10) : (x + 5)$ dà resto 0, per il teorema del resto; quindi il polinomio $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ è divisibile per $x + 5$.

In generale, vale il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema di Ruffini

Un polinomio $A(x)$ è divisibile per un binomio $x - a$ se e soltanto se $A(a)$ è uguale a 0.

ESEMPIO

Il polinomio

$$A(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

è divisibile sia per $x - 1$ sia per $x + 2$; infatti:

$$A(1) = 2 + 1 - 5 + 2 = 0;$$

$$A(-2) = 2(-8) + 4 - 5(-2) + 2 = -16 + 4 + 10 + 2 = 0.$$

▸ Fai un esempio di polinomio di quarto grado divisibile sia per $x + 1$ sia per $x - 3$.
Verifica la divisibiltà mediante il teorema di Ruffini.

4 Scomposizione in fattori

Scomporre in fattori un polinomio significa scriverlo come prodotto di polinomi di grado inferiore.

ESEMPIO

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1).$$

$(x^2 - 1)$ può essere ancora scomposto in $(x + 1)(x - 1)$. Quindi:

$$x^4 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1).$$

Invece, $x^2 + 1$ non è scomponibile. Verificalo con il teorema di Ruffini.

DEFINIZIONE

Un **polinomio** è **riducibile** quando può essere scomposto nel prodotto di polinomi, tutti di grado minore.

Un polinomio non riducibile si chiama **irriducibile**.

ESEMPIO

$x^2 - 2x + 1$ è riducibile. Infatti:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2.$$

Sono irriducibili i polinomi: $x^2 + 25$, $x + 4$, $2x^2 + 5$.

▶ Spiega perché $x - 5$ è irriducibile. (*Suggerimento.* Ragiona per assurdo: se fosse scomponibile, i fattori dovrebbero essere di grado…, cioè dei…)

Raccoglimento totale

▶ Esercizi a p. 24

Esaminiamo un metodo di scomposizione basato sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.
Se in tutti i termini di un polinomio è contenuto uno stesso fattore, lo mettiamo in evidenza con un **raccoglimento totale a fattore comune**.

ESEMPIO

Scomponiamo $4a^6 - 8a^5 + 2a^4$.

Il fattore comune a tutti i termini è $2a^4$.

$$4a^6 - 8a^5 + \underline{2a^4} = 2a^2 \cdot \underline{2a^4} - 4a \cdot \underline{2a^4} + \underline{2a^4} = \underline{2a^4}(2a^2 - 4a + 1)$$

Scomponiamo $5(x+2) - x^2(x+2)$.

$$5\underline{(x+2)} - x^2\underline{(x+2)} = \underline{(x+2)}(5 - x^2).$$

▶ Scomponi in fattori mediante raccoglimento totale.

- $\frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{4}{3}xy^3$;
- $3x(x+y) - 6(x+y)^2$.

Raccoglimento parziale

▶ Esercizi a p. 26

Nel **raccoglimento parziale**, prima si raccolgono fattori comuni soltanto a parti del polinomio, poi si raccoglie un fattore comune alle diverse parti.

ESEMPIO

$$\underline{x^2 + 3xy} + \underline{2x + 6y} = x\underline{(x + 3y)} + 2\underline{(x + 3y)} = \underline{(x + 3y)}\,(x + 2).$$

Il metodo che abbiamo applicato percorre in verso contrario i passaggi che utilizziamo nella moltiplicazione di due polinomi.

▶ Scomponi in fattori tramite raccoglimento parziale.

- $a^2x + 8a^2 + x + 8$;
- $xy + 3x + bx + y^2 + 3y + by$;
- $3\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + 3a - \frac{3}{2}b$.

Video

Scomposizione in fattori del trinomio speciale
Guarda nel video come scomporre in fattori i seguenti polinomi:
x^2+x-12;
$2x^2-x-10$.

▶ Scomponi in fattori:
x^2-x-56;
$a^2+9a+20$.

▶ Scomponi in fattori:
a. $\frac{25}{4}x^2-10xy+4y^2$;
b. $\frac{1}{4}a^4+4a^2b^2+16b^4$;
c. $-9x^2+6x-1$;
d. $(a-b)^2+4x^2+4x(a-b)$.

Animazione

Trinomio speciale

▶ Esercizi a p. 26

Un trinomio di secondo grado del tipo x^2+sx+p è scomponibile nel prodotto $(x+a)(x+b)$ se $s=a+b$ e $p=ab$:

$$\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).}$$

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori $y^2+2y-15$.
Cerchiamo due numeri che abbiano prodotto -15 e somma $+2$.
Tutte le coppie di numeri interi che hanno prodotto -15 sono:

$$-15=(-5)\cdot(+3)=(+5)(-3)=(-15)\cdot(+1)=(+15)\cdot(-1).$$

L'unica coppia che ha somma $+2$ è $(+5)$ e (-3). Quindi:

$$y^2+2y-15=(y+5)(y-3).$$

Scomposizioni con prodotti notevoli

▶ Esercizi a p. 28

Ognuna delle seguenti uguaglianze si verifica calcolando il prodotto che si trova nel secondo membro e fornisce una regola di scomposizione in fattori.

$$\boldsymbol{A^2-B^2=(A+B)(A-B);}$$
$$\boldsymbol{A^2+2AB+B^2=(A+B)^2;}$$
$$\boldsymbol{A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC=(A+B+C)^2;}$$
$$\boldsymbol{A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3;}$$
$$\boldsymbol{A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2);}$$
$$\boldsymbol{A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2).}$$

ESEMPIO

$$25a^2-b^6=(5a)^2-(b^3)^2=(5a+b^3)(5a-b^3).$$
$$9x^4-6x^2y+y^2=(3x^2)^2-2\cdot 3x^2\cdot y+y^2=(3x^2-y)^2.$$
$$a^3-1=a^3-1^3=(a-1)(a^2+a+1).$$

▶ Scomponi in fattori.
a. $8a^9+12a^6+6a^3+1$; **b.** $x^3-9x^2+27x-27$.

Animazione

▶ Scomponi in fattori.
a. $36a^2y^4-48ay^3+16y^2$; **b.** $81x^4-z^4$.

Video

Scomposizione con il metodo di Ruffini

▶ Esercizi a p. 32

Il teorema di Ruffini permette spesso di scomporre in fattori un polinomio. Consideriamo un polinomio $A(x)$. Sappiamo che, se $A(a)=0$, allora il polinomio è divisibile per $x-a$.

Eseguendo la divisione $A(x):(x-a)$, otteniamo il polinomio quoziente $Q(x)$ e, poiché il resto è zero, scriviamo $A(x)$ come prodotto di due fattori:

$$A(x)=(x-a)\,Q(x).$$

ESEMPIO

$$A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$$

ha valore 0 per $x = 2$, cioè 2 è uno zero di A,

$$A(2) = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 6 = 0,$$

quindi $A(x)$ è divisibile per $x - 2$.

Calcoliamo il quoziente applicando la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & 5 & -6 \\ 2 & & 4 & -2 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad Q(x) = 2x^2 - x + 3.$$

$$(2x^3 - 5x^2 + 5x - 6) : (x - 2) = 2x^2 - x + 3.$$

Quindi: $2x^3 - 5x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(2x^2 - x + 3)$.

Dunque, se troviamo uno **zero a di un polinomio** $A(x)$, cioè un valore a tale che $A(a) = 0$, sappiamo anche scomporre il polinomio di partenza nel prodotto di due fattori.
Ma come trovare gli zeri di un polinomio? Per farlo può essere utile considerare la seguente regola.

Zeri interi di un polinomio
Se un numero intero annulla un polinomio a coefficienti interi, allora esso è divisore del termine noto.

Dalla regola possiamo dedurre un metodo per la ricerca degli zeri interi di un polinomio: se esistono, essi sono fra i divisori del termine noto.

ESEMPIO

Dato il polinomio $A(x) = 5x^2 - x - 4$, i divisori di -4 sono: $1, 2, 4, -1, -2, -4$.
Sostituendo a x il valore 1, otteniamo

$$A(1) = 5 - 1 - 4 = 0,$$

quindi 1 è uno zero di $A(x)$, perciò il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Calcoliamo il quoziente applicando la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 5 & -1 & -4 \\ 1 & & 5 & 4 \\ \hline & 5 & 4 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad Q(x) = 5x + 4.$$

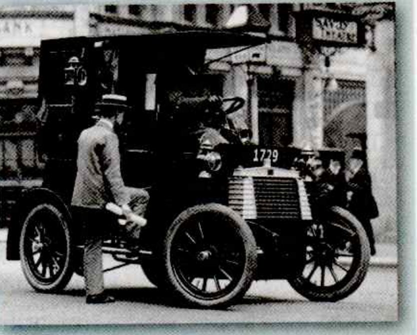
Otteniamo: $5x^2 - x - 4 = (x - 1)(5x + 4)$.

Più in generale si ha la seguente regola.

Zeri razionali di un polinomio
Tutti gli zeri razionali di un polinomio a coefficienti interi sono tra le frazioni $\pm\dfrac{m}{n}$, dove m è divisore del termine noto e n è divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

MATEMATICA E STORIA

1729 Salire su un taxi numero 1729 lascerebbe indifferenti la maggior parte delle persone. Ma per il matematico indiano Srinivasa Ramanujan un episodio apparentemente banale fu l'occasione di una celebre scoperta...



► Che cosa ha di speciale un numero così?

La risposta

► Scomponi in fattori con il metodo di Ruffini.
$3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

Animazione

Video

Scomposizione mediante il teorema di Ruffini Guarda nel video come scomporre in fattori con il metodo di Ruffini il polinomio $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$.

TEORIA

Nell'esempio precedente le frazioni da considerare sono:

$$\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{4}{1}.$$

5 MCD e mcm di polinomi

▶ Esercizi a p. 35

DEFINIZIONE

Il **massimo comune divisore** (MCD) di due o più polinomi è il polinomio di grado massimo che è divisore di tutti i polinomi dati.

Il **minimo comune multiplo** (mcm) di due o più polinomi è il polinomio di grado minimo che è divisibile per tutti i polinomi dati.

Per calcolare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo fra polinomi, utilizziamo il procedimento già illustrato per i numeri naturali e per i monomi. Come prima cosa bisogna scomporre i polinomi in fattori irriducibili, raccogliendo anche gli eventuali coefficienti numerici in comune.

Calcolo del MCD

Il MCD fra due o più polinomi è il prodotto dei loro **fattori irriducibili comuni**, presi una sola volta, con l'esponente minore.

ESEMPIO

Determiniamo il MCD di $x^2y - xy$, $x^2y - y$, $x^3y - 3x^2y + 3xy - y$.

Scomponiamo in fattori:

$x^2y - xy = xy(x - 1)$;

$x^2y - y = y(x^2 - 1) = y(x + 1)(x - 1)$;

$x^3y - 3x^2y + 3xy - y = y(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = y(x - 1)^3$.

Mettiamo in colonna.

x	y	$x - 1$	
	y	$x - 1$	$x + 1$
	y	$(x - 1)^3$	

I fattori comuni sono y e $(x - 1)$. Prendiamo $(x - 1)$ con l'esponente minore:

$\text{MCD} = y(x - 1)$.

Calcolo del mcm

Il mcm fra due o più polinomi è il prodotto dei loro **fattori irriducibili comuni e non comuni**, presi una sola volta, con l'esponente maggiore.

ESEMPIO

Determiniamo il mcm dei polinomi dell'esempio precedente.

Dopo avere incolonnato i fattori, scegliamo quelli comuni e non comuni, ciascuno preso con l'esponente maggiore.

x	y	$x - 1$	
	y	$x - 1$	$x + 1$
	y	$(x - 1)^3$	

$\text{mcm} = xy(x - 1)^3(x + 1)$.

▶ Calcola MCD e mcm di $x^2 + 2x - 3$, $2x^3 + 12x^2 + 18x$, $x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Animazione

Video

MCD e mcm di polinomi

Determina MCD e mcm dei seguenti polinomi:

$4x^5 - 4x^3$;

$6x^3 + 12x^2 + 6x$;

$8x^3 + 8x^2$.

IN SINTESI
Divisione fra polinomi e scomposizione in fattori

Divisione fra polinomi

M
- Un polinomio è **divisibile per un monomio** se lo sono tutti i suoi termini. In tal caso il quoziente si ottiene dividendo ogni termine per il monomio.

ESEMPIO: $(6x^4 + 3x^3 - 4x^2) : 2x^2 = 3x^2 + \frac{3}{2}x - 2.$

P
- Nella **divisione** fra due polinomi, $A : B$, se Q è il polinomio quoziente e R il polinomio resto, allora:

$A = B \cdot Q + R.$

ESEMPIO: $(3x^2 - x - 1) : (x + 2).$

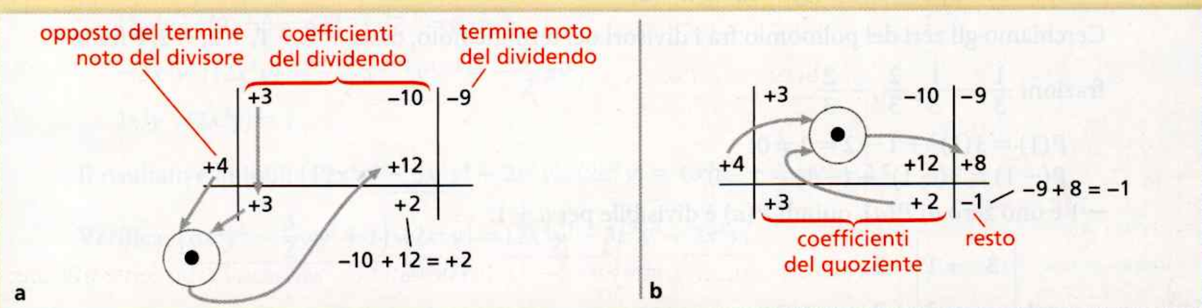
$$\underbrace{3x^2 - x - 1}_{A} = \underbrace{(x + 2)}_{B}\underbrace{(3x - 7)}_{Q} + \underbrace{13}_{R}.$$

- Un polinomio A è **divisibile** per un polinomio B se e solo se $R = 0$, ossia $A : B = Q \leftrightarrow A = B \cdot Q$.

Regola di Ruffini

Se il divisore di un polinomio è un binomio del tipo $x - a$, possiamo utilizzare la **regola di Ruffini**.
Se il divisore è del tipo $x + a$, possiamo scriverlo nella forma $x - (-a)$ e applicare la stessa regola.

ESEMPIO: $(3x^2 - 10x - 9) : (x - 4).$



Teorema del resto e teorema di Ruffini

- **Teorema del resto.** Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio $x - a$ è $A(a)$.
- **Teorema di Ruffini.** Un polinomio $A(x)$ è divisibile per un binomio $x - a$ se e soltanto se $A(a) = 0$.

$$\underbrace{(x^3 + 7x^2 + x - 2)}_{A(x)} : \underbrace{(x + 3)}_{x - a} \qquad a = -3$$

$$A(-3) = [(-3)^3 + 7(-3)^2 + (-3) - 2] = -27 + 63 - 3 - 2 = 31$$

R = 31

$x^2 - 3x - 10$ è divisibile per $x - 5$ $\Longleftrightarrow$ (se e solo se) $5^2 - 3 \cdot 5 - 10 = 0$

Scomposizione in fattori

- Scomporre un polinomio in fattori significa scriverlo come prodotto di polinomi. Se un polinomio si può scomporre, diciamo che è **riducibile**. Altrimenti è **irriducibile**.
- Abbiamo esaminato i seguenti **metodi di scomposizione**.
  - Il **raccoglimento totale**.

    ESEMPIO: $3a^2 + 6a = 3a(a + 2)$.
  - Il **raccoglimento parziale**.

    ESEMPIO: $3a + 3b + a^2 + ab = 3(a + b) + a(a + b) = (3 + a)(a + b)$.
  - La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli:
    - **differenza di due quadrati**: $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$;
    - **quadrato di un binomio**: $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$;
    - **quadrato di un trinomio**: $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2}$;
    - **cubo di un binomio**: $\boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3}$;
    - **somma** o **differenza di due cubi**:
      $\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$; $\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$.

    ESEMPIO: $9 - a^2 = (3 + a)(3 - a)$.
    $9 - 6a + a^2 = (3 - a)^2$.
    $27 + a^3 = (3 + a)(9 - 3a + a^2)$.
  - La scomposizione di **particolari trinomi di secondo grado**:
    $x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2)$, con $s = x_1 + x_2$, $p = x_1 \cdot x_2$.

    ESEMPIO: $a^2 - 6a + 8 = (a - 4)(a - 2)$.
  - La scomposizione mediante **il teorema e la regola di Ruffini**.

    ESEMPIO: Scomponiamo $P(a) = 3a^2 + a - 2$.

    Cerchiamo gli zeri del polinomio fra i divisori del termine noto, ossia $+1$, -1, $+2$, -2, e fra le frazioni $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$.

    $P(1) = 3(1)^2 + 1 - 2 = 2 \neq 0$;
    $P(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 2 = 0$.
    -1 è uno zero di $P(a)$, quindi $P(a)$ è divisibile per $a + 1$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & +1 & -2 \\ -1 & & -3 & +2 \\ \hline & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$3a - 2$ è il quoziente della divisione, quindi: $3a^2 + a - 2 = (a + 1)(3a - 2)$.

MCD e mcm di polinomi

- Per la ricerca del **MCD** e del **mcm** fra polinomi, questi devono essere scomposti in fattori irriducibili.
- Il MCD fra due o più polinomi è il prodotto di tutti i fattori irriducibili comuni, presi una sola volta, ciascuno con l'esponente minore.
- Il mcm è il prodotto di tutti i fattori irriducibili, comuni e non comuni, presi una sola volta, ciascuno con l'esponente maggiore.

CAPITOLO 1
ESERCIZI

1 Divisione fra polinomi

Se il divisore è un monomio

Teoria a p. 2

TEST

1 Il polinomio $2a^2x^4 - ax^3 + a^4x^2$ *non* è divisibile per uno solo dei seguenti monomi. Quale?

A x

B $2x^2$

C $-a$

D a^2x^2

E 5

2 Quale delle seguenti divisioni *non* è possibile?

A $(x^2 + 2x):(3x)$

B $(6a^4 - 12a^3 + 1):(6a^3)$

C $(2x^3 - x^2):\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

D $(a^2 - a):3$

E $(x^8 + x^9):x^3$

3 RIFLETTI SULLA TEORIA Giulio: «Aiutami a eseguire questa divisione di un polinomio per un monomio: $(x^3y^4 + x^2y^3 + 2xy^2):(-2x^2y^2)$». Teresa «Guarda che non è possibile». Cosa ne pensi?

4 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo, se è possibile, le seguenti divisioni:

a. $(12x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y):(2x^2y)$; **b.** $(5ab^2 + 3a^3b^3 - 3a^4):(2a^2b^2)$.

a. La divisione $(12x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y):(2x^2y)$ è possibile, perché ogni termine del dividendo contiene le variabili del divisore, con esponente maggiore o uguale.
Dividiamo per $2x^2y$ ogni termine del polinomio dividendo:

$$12x^4y^3:(2x^2y) = 6x^{4-2}y^{3-1} = 6x^2y^2;$$
$$-3x^3y^4:(2x^2y) = -\frac{3}{2}x^{3-2}y^{4-1} = -\frac{3}{2}xy^3;$$
$$2x^2y:(2x^2y) = 1.$$

Il risultato è quindi: $(12x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y):(2x^2y) = 6x^2y^2 - \frac{3}{2}xy^3 + 1$.

Verifica: $\underbrace{\left(6x^2y^2 - \frac{3}{2}xy^3 + 1\right)}_{\text{quoziente}} \cdot \underbrace{(2x^2y)}_{\text{divisore}} = \underbrace{12x^4y^3 - 3x^3y^4 + 2x^2y}_{\text{dividendo}}$.

b. La divisione $(5ab^2 + 3a^3b^3 - 3a^4):(2a^2b^2)$ non è possibile per due motivi:

- $5ab^2$ ha grado rispetto ad a minore di $2a^2b^2$;
- $-3a^4$ ha grado rispetto a b minore di $2a^2b^2$ (il grado rispetto a b di $-3a^4$ è 0).

Esegui, se è possibile, le seguenti divisioni di un polinomio per un monomio e fai la verifica.

5 $(20a^4 - 12a^3 + 6a^2):(+2a^2)$ $[10a^2 - 6a + 3]$

6 $(x^3 - x^2 + x):\left(-\frac{1}{2}x\right)$ $[-2x^2 + 2x - 2]$

7 $\left(a^4 + a^3b - \frac{1}{5}ab^3 + a^2b^2\right):\left(-\frac{1}{5}a\right)$ $[-5a^3 - 5a^2b + b^3 - 5ab^2]$

8 $(7x^4 - 3x^2y^3 + 5x^3y^2):(-3x^2)$ $\left[-\frac{7}{3}x^2 + y^3 - \frac{5}{3}xy^2\right]$

9 $(x^8 - 4x^5 + 3x^4 + x^3):(-2x^3)$ $\left[-\frac{1}{2}x^5 + 2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right]$

10 $(6x^4y^3 + 12x^2y^2 - 3x^3) : (3x^2y)$ [impossibi

11 $\left(-\frac{3}{2}b^6 + \frac{3}{4}b^5 - \frac{1}{8}b^4\right) : \left(-\frac{3}{4}b^3\right)$ $\left[2b^3 - b^2 + \frac{1}{6}\right.$

12 $\left(a^5b^2 + a^4b^3 + \frac{1}{2}b^8\right) : (2b^2)$ $\left[\frac{1}{2}a^5 + \frac{1}{2}a^4b + \frac{1}{4}b\right.$

13 $\left(-\frac{2}{3}a^6 + \frac{1}{3}a^4 + \frac{4}{15}a^3\right) : \left(-\frac{2}{9}a^3\right)$ $\left[3a^3 - \frac{3}{2}a - \frac{6}{5}\right.$

COMPLETA

14 $\left(\boxed{-\frac{1}{2}x^6 + x^5 + 4x^2}\right) : (2x) = -x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 2x.$

15 $(8a^8 - 2a^6 + 4a^5) : (\boxed{-4a^4}) = -2a^4 + \boxed{\frac{1}{2}a^2 - a}.$

16 $(16x^6y^4 + \boxed{-48x^4y^3}) : (\boxed{12x^2y}) = \frac{4}{3}x^4y^3 - 4x^2y^2.$

17 $(5m^6 + \boxed{10m^4 - 2m^2}) : (\boxed{5m^2}) = m^4 + 2m^2 - \frac{2}{5}.$

Semplifica le seguenti espressioni.

18 $[(3x^3 + 6x^2) : 2x - x] : x$ $\left[\frac{3}{2}x + 2\right.$

19 $\{[(3y-1)(3y+1)(9y^2+1) + 1] : y^3 - 81y\} : (3y)$ [0

20 $\left\{[(x^4-1)^2(x^4+1)^2 - x^8 - 1] : \left(\frac{1}{3}x^3\right)\right\} : \left(\frac{3}{2}x^3\right)$ $[2x^{10} - 6x$

21 $\{[(a+b)^3 - (a-b)^3] : (6b)\} : \left(-\frac{3}{2}\right)$ $\left[-\frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{9}b^{}\right.$

22 $(-2x^2y + 4x^4y^2 - x^4y) : [(x+y)^2 - (x+y)(x-y) - 2y^2]$ $\left[-x + 2x^3y - \frac{1}{2}x\right.$

23 $\{[b(2a-b)(2a+b) + b^2(b+4ab)] : (-2ab) + 2(a+b^2)\} : \left(\frac{1}{2}b\right)$ [0

24 $[(2x+1)(2x-1)(4x^2+1) + 1] : (-2x)^3 + 3x + y$ $[x + y$

25 $[(3x-y)^3 + y^3] : (3x) - (3x-y)^2$ $[2y^2 - 3xy$

26 $[(2x^2y - 4xy^2)^3 - 8y^3(-2xy)^3] : (-2x^2y)^2$ $[2x^2y - 12xy^2 + 24y^3$

Se il divisore è un polinomio

Teoria a p. 3

Polinomi a coefficienti numerici

27 In una divisione tra polinomi il divisore è $x - 4$, il quoziente è $x^2 - 6x + 2$ e il resto è -1. Qual è il dividendo? $[x^3 - 10x^2 + 26x - 9]$

28 Trova il polinomio dividendo di una divisione in cui il divisore è $x^2 - 1$, il quoziente è $2x^2 - x + 1$ e il resto è $x + 2$. $[2x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 1]$

29 Il polinomio $P(x)$ è divisibile per $2x^2 - x + 1$ e il quoziente è $-x^3 + 4x$. Determina $P(x)$. $[-2x^5 + x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 4x]$

30 Trova il polinomio dividendo di una divisione in cui il divisore è $2x + 5$, il quoziente $-x^2 + x - 1$ e il resto -3. $[-2x^3 - 3x^2 + 3x - 8]$

31 **ESERCIZIO GUIDA** Eseguiamo la divisione $(3x^3 + 4x^2 + 6x^4 + x) : (3x^2 + 2)$.

Ordiniamo il polinomio dividendo: $6x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x$.

Costruiamo lo schema della divisione e risolviamo:

- dividiamo $6x^4$ (termine di grado più alto del divisore) per $3x^2$ (termine di grado più alto del dividendo) e otteniamo $2x^2$, primo termine del quoziente;
- moltiplichiamo $2x^2$ per $3x^2 + 2$, cambiamo di segno e scriviamo il risultato, $-6x^4 - 4x^2$, in colonna con il dividendo;
- sommiamo ottenendo il resto parziale $3x^3 + x$;
- ripetiamo il procedimento, ottenendo $+x$ come secondo termine del quoziente, che è anche l'ultimo perché il resto $-x$ ha grado minore del grado del divisore.

Il quoziente è $2x^2 + x$; il resto è $-x$.

scriviamo 0 nei termini mancanti

$$\begin{array}{ccccc|c}
6x^4 & +3x^3 & +4x^2 & +x & +0 & 3x^2+2 \\
-6x^4 & & -4x^2 & & & 2x^2+x \\
\hline
 & 3x^3 & & +x & & \\
 & -3x^3 & & -2x & & \\
\hline
 & & & -x & &
\end{array}$$

Esegui, quando è possibile, le seguenti divisioni fra polinomi.

32 $(x^4 + 3x^2 - 4) : (x^2 - 4)$ $[Q = x^2 + 7;\ R = 24]$

33 $(15a^3 - 8a^2 - 9a + 2) : (3a + 2)$ $[Q = 5a^2 - 6a + 1;\ R = 0]$

34 $(7a - a^3 + 2 + a^2) : (a^2 + 2)$ $[Q = -a + 1;\ R = 9a]$

35 $(8x^3 - 4x + 1) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$ $[Q = 8x^2 + 4x - 2;\ R = 0]$

36 $(x^3 + 2x - 1) : (x^2 - 4)$ $[Q = x;\ R = 6x - 1]$

37 $\left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - x - 3\right) : \left(\frac{1}{4}x^2 + x\right)$ $[Q = -2x^2 + 9x - 36;\ R = 35x - 3]$

38 $\left(-\frac{1}{3}b^6 - b^5 + \frac{7}{3}b^4 + 7\right) : \left(-\frac{1}{3}b^4 - 1\right)$ $[Q = b^2 + 3b - 7;\ R = b^2 + 3b]$

39 $(x^4 - 4x^2 + 4) : (x^2 + 4)$ $[Q = x^2 - 8;\ R = 36]$

40 $(2x^6 + 3x^3 + 6) : (x^3 + 1)$ $[Q = 2x^3 + 1;\ R = 5]$

41 $(3x^3 - 5x^2 + 4x + 2) : (x - 3)$ $[Q = 3x^2 + 4x + 16;\ R = 50]$

42 $(x^2 - 6x + 3) : (1 - x^3)$ [impossibile]

43 $(5a^6 + 15a^5 + 20 + 5a) : (a + 3)$ $[Q = 5a^5 + 5;\ R = 5]$

44 $(16x^5 - 8x^3 + 2x - 1) : (x^3 - 1)$ $[Q = 16x^2 - 8;\ R = 16x^2 + 2x - 9]$

45 $\left(-y^2 + \frac{3}{2}y^3 - 2\right) : (3y^2 + 2y)$ $\left[Q = \frac{1}{2}y - \frac{2}{3};\ R = \frac{4}{3}y - 2\right]$

46 $(2a^3 - 4a^2 + a + 2) : (2a^2 + a - 1)$ $\left[Q = a - \frac{5}{2};\ R = \frac{9}{2}a - \frac{1}{2}\right]$

47 $(a^4 + 6a^2 - 4a^3 - 4a + 1) : \left(-\frac{2}{3} + a^3\right)$ $\left[Q = a - 4;\ R = 6a^2 - \frac{10}{3}a - \frac{5}{3}\right]$

48 $(x^5 - x^3 + 1) : (x^2 + 1)$ $[Q = x^3 - 2x;\ R = 2x + 1]$

49 $(x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 10) : (x^3 - 2)$ $[Q = x^2 - 3x + 5;\ R = 0]$

50 $(4a^2 - 3a + 6a^3 - 2) : (1 + 2a)$ $\left[Q = 3a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{7}{4};\ R = -\frac{1}{4}\right]$

51 $(3x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (3x^3 - 2x - 5 + x^5)$ [impossibile]

52 $(4y^3 + 3y + 3y^5 - 1) : (y + y^2 + 1)$ $[Q = 3y^3 - 3y^2 + 4y - 1;\ R = 0]$

53 $(3x^4 - 1) : (x^2 - x^3 - 3)$ $[Q = -3x - 3;\ R = 3x^2 - 9x - 10]$

ESERCIZI

54 $(t^4+4t^3-5):(1-t^3)$ $[Q=-t-4;\ R=t-$

55 $(2a^3-3a^2-12):(2a-a^2)$ $[Q=-2a-1;\ R=2a-$

56 $(x^5-1):(x-1)$ $[Q=x^4+x^3+x^2+x+1;\ R=$

57 $(y^3-5y^2+3y-6):(y^2+1-2y)$ $[Q=y-3;\ R=-4y-$

58 $(-3y^3+11y^2-9y-2):(3y^2-5y-1)$ $[Q=2-y;\ R=$

59 $\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-2x-2\right):(x^2-2)$ $\left[Q=\frac{1}{4}x^2+1;\ R=-2\right.$

60 $\left(9b^4-6b^3+\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{4}b-\frac{1}{2}\right)$ $\left[Q=12b^3;\ R=+\frac{2}{3}\right.$

61 $(4x^3+18-3x):\left(-x+\frac{1}{2}\right)$ $[Q=-4x^2-2x+2;\ R=17$

62 $(24y^5-4y^4-18y^2+15y-2):(6y-1)$ $[Q=4y^4-3y+2;\ R=0$

63 YOU & MATHS **Dividing polynomials** Use $q(x)=2x+3$ and $p(x)=2x^2+3x-5$. Find $s(x)$ and $r(x)$ suc
that $p(x)=s(x)\cdot q(x)+r(x)$.

Polinomi a coefficienti letterali

64 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo la divisione $(x^3-3ax^2+5a^2x-a^3):(x^2-2ax+a^2)$, considerando come variabile la lettera x.

Osserviamo che il polinomio è già ordinato rispetto a x. Mettiamo in colonna e risolviamo.

$(-ax^2):x^2$

$$\begin{array}{l|l} x^3-3ax^2+5a^2x-a^3 & x^2-2ax+a^2 \\ \cline{2-2} -x^3+2ax^2-\ \ a^2x & x-a \\ \hline -\ ax^2+4a^2x-a^3 & \end{array}$$

secondo termine del quoziente

$-a\cdot(x^2-2ax+a^2)$ e cambiamo segno

$$\begin{array}{l|l} x^3-3ax^2+5a^2x-a^3 & x^2-2ax+a^2 \\ \cline{2-2} -x^3+2ax^2-\ \ a^2x & x-a \\ \hline -\ ax^2+4a^2x-a^3 & \\ +\ ax^2-2a^2x+a^3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-3ax^2+5a^2x-a^3 & x^2-2ax+a^2 \\ \cline{2-2} -x^3+2ax^2-\ \ a^2x & x-a \\ \hline -\ ax^2+4a^2x-a^3 & \\ +\ ax^2-2a^2x+a^3 & \\ \hline 2a^2x & \end{array}$$

Il quoziente è $x-a$; il resto è $2a^2x$.

Esegui le seguenti divisioni fra polinomi, considerando come variabile quella indicata a fianco.

65 $(a^2-3b^2-2ab):(b+a)$, a. $[Q=a-3b;\ R=0]$

66 $(x^6-y^4):(3x^3+3y^2)$, x. $\left[Q=\frac{1}{3}(x^3-y^2);\ R=0\right]$

67 $(a^3b^3+2a^2b^4-b^6+1):(a+b)$, a. $[Q=b^3a^2+b^4a-b^5;\ R=1]$

68 $(t^5-t^2z+tz^2+z^3):(z^2-t^2)$, z. $[Q=z+t;\ R=t^5+t^3]$

69 $(36x^2y+12xy^2+y^3):(6x+y)$, x. $[Q=6xy+y^2;\ R=0]$

70 $(x^3-2x^2y+xy^2):(x^2-2xy+y^2)$, x. $[Q=x;\ R=0]$

71 $(4b^3-20ab^2-9a^2b+45a^3):(b-5a)$, b. $[Q=4b^2-9a^2;\ R=0]$

72 $(15x^2+4xy-4y^2):(5x-2y)$, x. $[Q=3x+2y; R=0]$

73 $(-2a^4+4a^3+a^2b-6ab+3b^2):(3b-2a^2)$, a. $[Q=a^2-2a+b; R=0]$

74 $(2x^3-9x^2y+13xy^2-6y^3):(2x-3y)$, x e y. $[Q=2y^2-3xy+x^2; R=0]$

75 $(11a^2b^2-ab^3+2a^3b-3b^4):(b^2+2ab)$, b. $[Q=-3b^2+5ab+a^2; R=0]$

76 $\left(-\frac{1}{2}b^3-b^2c^2+3bc^4-c^6\right):(b-c^2)$, b. $\left[Q=-\frac{1}{2}b^2-\frac{3}{2}bc^2+\frac{3}{2}c^4; R=\frac{1}{2}c^6\right]$

77 $(3y^3-14ay^2+21a^2y-12a^3):(3y-8a)$, y. $\left[Q=y^2-2ay+\frac{5}{3}a^2; R=\frac{4}{3}a^3\right]$

78 $\left(a^4b-\frac{1}{3}a^3b^2-2b^3+6ab^2\right):\left(\frac{2}{3}b-2a\right)$, a. $\left[Q=-\frac{1}{2}a^3b-3b^2; R=0\right]$

79 $(6a^4-2a^3b-24a^2b+20ab^2-4b^3):(3a-b)$, a. $[Q=2a^3-8ab+4b^2; R=0]$

80 $(a^6-b^6+a^4b^2-a^2b^4):(a^4+2a^2b^2+b^4)$, a. $[Q=a^2-b^2; R=0]$

81 $(2x^3y-9x^2y+8y+2xy):(xy-4y)$, x. $[Q=2x^2-x-2; R=0]$

82 $(-b^2-1+a^2-2b):(a-1-b)$, a. $[Q=a+1+b; R=0]$

83 $\left(a^3+\frac{5}{2}a^2b-4ab^2-3b^3\right):(2a-3b)$, a. $\left[Q=\frac{1}{2}a^2+2ab+b^2; R=0\right]$

84 $(x^4-4x^3y+5x^2y^2-3xy^3+2y^4):(-2y^2+x^2)$, x. $[Q=x^2-4xy+7y^2; R=-11xy^3+16y^4]$

85 **TEST** È data la divisione: $(5a^3-6a^2-3a+4):(ka+4)$.
Per quale valore di k il quoziente è a^2-2a+1?

A 2 B -3 C 0 D 5 E -5

FAI UN ESEMPIO

86 Scrivi un polinomio divisibile sia per a^2-1 che per $a+3$.

87 Scrivi un polinomio di quarto grado divisibile per $2x^2+1$.

88 **AL VOLO** Il grado del resto di una divisione fra polinomi può essere uguale o maggiore del grado del divisore? Fornisci un esempio.

2 Regola di Ruffini

Teoria a p. 4

Divisore del tipo $(x-a)$

89 **TEST** In quale delle seguenti divisioni *non* si può applicare la regola di Ruffini?

A $x^3:(x-2)$

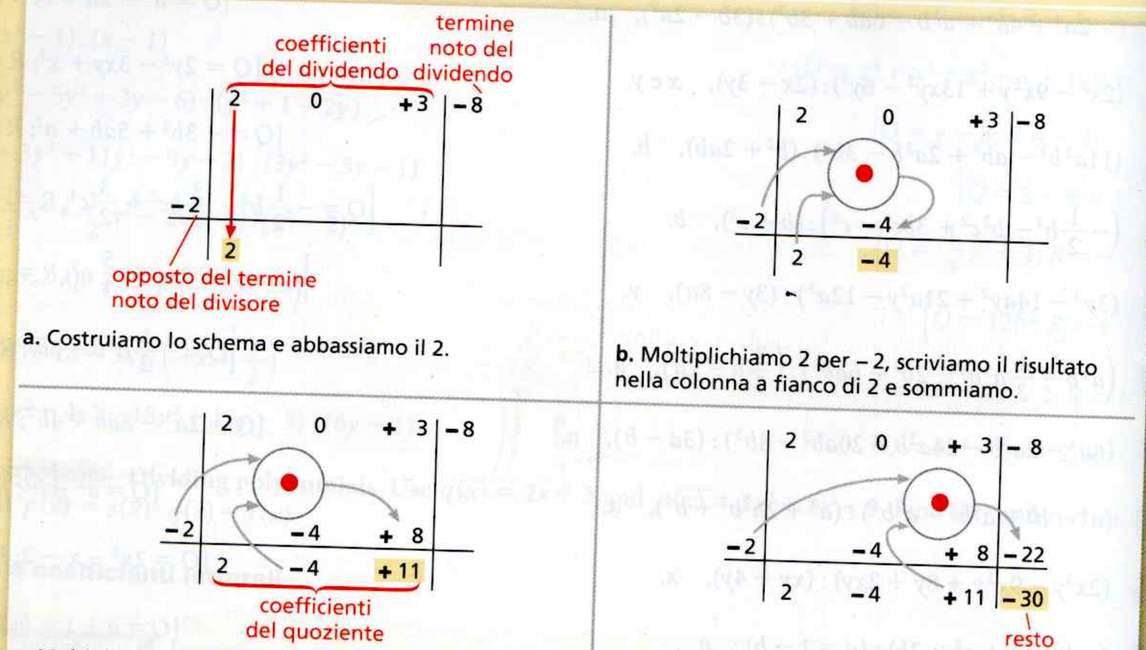
B $(x^4-1):(2+x)$

C $(x^3+x):(-x-1)$

D $(x^5-x^3):(x^2+1)$

E $(x^5+1):(1-x)$

90 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo la divisione $(2x^3 + 3x - 8) : (x + 2)$, applicando la regola di Ruffini.



a. Costruiamo lo schema e abbassiamo il 2.

b. Moltiplichiamo 2 per − 2, scriviamo il risultato nella colonna a fianco di 2 e sommiamo.

c. Moltiplichiamo − 4 per − 2 e completiamo la terza colonna: abbiamo trovato i coefficienti del quoziente.

d. Moltiplichiamo + 11 per − 2, scriviamo il risultato sotto − 8 e sommiamo: abbiamo trovato il resto.

I coefficienti del quoziente sono 2, − 4 e 11. Poiché il dividendo è di terzo grado, il polinomio quoziente è di secondo grado. $Q(x) = 2x^2 - 4x + 11$; $R = -30$.

Esegui le seguenti divisioni, applicando la regola di Ruffini.

91 $(a^2 - a - 12) : (a - 4)$ $[Q = a + 3 ; R = 0$

92 $(2x^3 - 9x + 1) : (x - 3)$ $[Q = 2x^2 + 6x + 9; R = 28$

93 $(3x^3 + x^2 - 8x + 4) : (x + 2)$ $[Q = 3x^2 - 5x + 2 ; R = 0$

94 $(b^3 + b^2 - b + 15) : (b + 3)$ $[Q = b^2 - 2b + 5 ; R = 0$

95 $(y^5 - y^2 + 6y - 4) : (y + 1)$ $[Q = y^4 - y^3 + y^2 - 2y + 8; R = -12]$

96 $(6x^3 + 2) : (x - 3)$ $[Q = 6x^2 + 18x + 54; R = 164]$

97 $(x^3 + 17x - 7x^2 - 18) : (x - 4)$ $[Q = x^2 - 3x + 5; R = 2]$

98 $(2a^3 - 3a^2 - 10a - 1) : (a - 3)$ $[Q = 2a^2 + 3a - 1; R = -4]$

99 $(-x^4 + 5x^2 - x + 1) : (-1 + x)$ $[Q = -x^3 - x^2 + 4x + 3; R = 4]$

100 $(-3x^2 + 2x^3 - x + 2) : (x - 1)$ $[Q = 2x^2 - x - 2 ; R = 0]$

101 $(x^5 + x^2 - x^4 - x) : (x - 1)$ $[Q = x^4 + x ; R = 0]$

102 $(a^5 - 10a - 12) : (a - 2)$ $[Q = a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 6 ; R = 0]$

103 $(2a^3-3a^2-1):(a+3)$ $[Q=2a^2-9a+27;\ R=-82]$

104 $\left(-\frac{3}{2}b^3+9b^2-17b+20\right):(b-4)$ $\left[Q=-\frac{3}{2}b^2+3b-5;\ R=0\right]$

105 $\left(2x^5-4x^3-\frac{5}{8}x+\frac{3}{4}\right):\left(x+\frac{3}{2}\right)$ $\left[Q=2x^4-3x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2};\ R=0\right]$

Divisore del tipo (*ax* − *b*)

106 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo la divisione $(3x^3-2x^2+2):(3x+1)$ applicando la regola di Ruffini.

Dividiamo tutti i coefficienti del dividendo e del divisore per il coefficiente 3 con cui la x compare nel divisore $3x+1$ e applichiamo la regola di Ruffini.

$$\left(x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}\right):\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \hline & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \end{array} \quad \rightarrow \quad Q_1=x^2-x+\frac{1}{3};\ R_1=\frac{5}{9}.$$

Sappiamo che $A=B\cdot Q+R$; dividendo i due membri per 3, otteniamo: $\frac{A}{3}=\frac{B}{3}\cdot Q+\frac{R}{3}$.

Concludiamo che, se dividiamo dividendo e divisore per 3, il quoziente rimane lo stesso, mentre il resto diventa $\frac{1}{3}$ del resto iniziale. La divisione iniziale ha quindi $Q=Q_1$ e $R=R_1\cdot 3$:

$$Q=x^2-x+\frac{1}{3};\quad R=\frac{5}{9}\cdot 3=\frac{5}{3}.$$

Esegui le seguenti divisioni applicando la regola di Ruffini.

107 $(12x^3-54x^2+21x-3):(3x-12)$ $[Q=4x^2-2x-1;\ R=-15]$

108 $(12y^3+36y^2-38y+42):(2y+8)$ $[Q=6y^2-6y+5;\ R=2]$

109 $(6a^4-24a^3+24a^2+12a-19):(6a-12)$ $[Q=a^3-2a^2+2;\ R=5]$

110 $(6b^5+30b^4-14b^2-4b^3-49+20b):(2b+10)$ $[Q=3b^4-2b^2+3b-5;\ R=1]$

111 $(5x^4-50x+85x^2-40x^3+3):(5x-25)$ $[Q=x^3-3x^2+2x;\ R=3]$

112 $(3a^3+a-2a^2-1):(3a+1)$ $\left[Q=a^2-a+\frac{2}{3};\ R=-\frac{5}{3}\right]$

113 $(8y^3-17y^2+10y-1):(8y-1)$ $[Q=y^2-2y+1;\ R=0]$

114 $(6b^3-34b^2+52b-18):(3b-5)$ $[Q=2b^2-8b+4;\ R=2]$

115 $(12x^4+15x^3+20x^2+13x-5):(4x+5)$ $[Q=3x^3+5x-3;\ R=10]$

116 $(5x^6-2x^5-5x^2+7x-2):(5x-2)$ $[Q=x^5-x+1;\ R=0]$

117 TEST Indica qual è il resto della divisione

$$\left(4x^2-2x+\frac{1}{2}\right):(2x-1).$$

A $\frac{1}{2}$ B $-\frac{1}{2}$ C $-\frac{3}{4}$ D $\frac{3}{2}$ E 0

ESERCIZI

103 $(2a^3-3a^2-1):(a+3)$ $[Q=2a^2-9a+27;\ R=-82]$

104 $\left(-\frac{3}{2}b^3+9b^2-17b+20\right):(b-4)$ $\left[Q=-\frac{3}{2}b^2+3b-5;\ R=0\right]$

105 $\left(2x^5-4x^3-\frac{5}{8}x+\frac{3}{4}\right):\left(x+\frac{3}{2}\right)$ $\left[Q=2x^4-3x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2};\ R=0\right]$

Divisore del tipo ($ax-b$)

106 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo la divisione $(3x^3-2x^2+2):(3x+1)$ applicando la regola di Ruffini.

Dividiamo tutti i coefficienti del dividendo e del divisore per il coefficiente 3 con cui la x compare nel divisore $3x+1$ e applichiamo la regola di Ruffini.

$$\left(x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}\right):\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \hline & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \end{array} \quad \rightarrow \quad Q_1=x^2-x+\frac{1}{3};\ R_1=\frac{5}{9}.$$

Sappiamo che $A=B\cdot Q+R$; dividendo i due membri per 3, otteniamo: $\frac{A}{3}=\frac{B}{3}\cdot Q+\frac{R}{3}$.

Concludiamo che, se dividiamo dividendo e divisore per 3, il quoziente rimane lo stesso, mentre il resto diventa $\frac{1}{3}$ del resto iniziale. La divisione iniziale ha quindi $Q=Q_1$ e $R=R_1\cdot 3$:

$$Q=x^2-x+\frac{1}{3};\quad R=\frac{5}{9}\cdot 3=\frac{5}{3}.$$

Esegui le seguenti divisioni applicando la regola di Ruffini.

107 $(12x^3-54x^2+21x-3):(3x-12)$ $[Q=4x^2-2x-1;\ R=-15]$

108 $(12y^3+36y^2-38y+42):(2y+8)$ $[Q=6y^2-6y+5;\ R=2]$

109 $(6a^4-24a^3+24a^2+12a-19):(6a-12)$ $[Q=a^3-2a^2+2;\ R=5]$

110 $(6b^5+30b^4-14b^2-4b^3-49+20b):(2b+10)$ $[Q=3b^4-2b^2+3b-5;\ R=1]$

111 $(5x^4-50x+85x^2-40x^3+3):(5x-25)$ $[Q=x^3-3x^2+2x;\ R=3]$

112 $(3a^3+a-2a^2-1):(3a+1)$ $\left[Q=a^2-a+\frac{2}{3};\ R=-\frac{5}{3}\right]$

113 $(8y^3-17y^2+10y-1):(8y-1)$ $[Q=y^2-2y+1;\ R=0]$

114 $(6b^3-34b^2+52b-18):(3b-5)$ $[Q=2b^2-8b+4;\ R=2]$

115 $(12x^4+15x^3+20x^2+13x-5):(4x+5)$ $[Q=3x^3+5x-3;\ R=10]$

116 $(5x^6-2x^5-5x^2+7x-2):(5x-2)$ $[Q=x^5-x+1;\ R=0]$

117 TEST Indica qual è il resto della divisione

$\left(4x^2-2x+\frac{1}{2}\right):(2x-1)$.

A $\frac{1}{2}$ **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{3}{4}$ **D** $\frac{3}{2}$ **E** 0

Divisione fra polinomi a coefficienti letterali

118 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo la divisione $(-8a^2x^2+3a^3x-3a^2+x^4):(x+3a)$ considerando come variabile la lettera x.

Ordiniamo i polinomi rispetto alla x: $(x^4-8a^2x^2+3a^3x-3a^2):(x+3a)$.
Applichiamo la regola di Ruffini.

	1	0	$-8a^2$	$+3a^3$	$-3a^2$
$-3a$		$-3a$	$+9a^2$	$-3a^3$	0
	1	$-3a$	a^2	0	$-3a^2$

$\rightarrow\ Q=x^3-3ax^2+a^2x;\ R=-3a^2.$

Esegui le seguenti divisioni, applicando la regola di Ruffini e considerando come variabile la prima lettera che compare al dividendo.

119 $(a^3+2a^2b-4ab^2-8b^3):(a+2b)$ $[Q=a^2-4b^2;\ R=0]$

120 $(y^4+x^3y-9x^2y^2+3x^4):(y+3x)$ $[Q=y^3-3xy^2+x^3;\ R=0]$

121 $(2x^4+5x^3y+2x^2y^2+x+2y):(x+2y)$ $[Q=2x^3+x^2y+1;\ R=0]$

122 $(y^3-8x^3-y^2+2xy):(y-2x)$ $[Q=y^2+2xy-y+4x^2;\ R=0]$

123 $(4x^3+5x^2y-9xy^2-12y^3):(x-y)$ $[Q=4x^2+9xy;\ R=-12y^3]$

124 $(a^3-12a^2b+10ab^2-3b^3):(a-b)$ $[Q=a^2-11ab-b^2;\ R=-4b^3]$

125 $(9x^3y+4x^2y^2-5xy^3+y^4):(x+3y)$ $[Q=9x^2y-23xy^2+64y^3;\ R=-191y^4]$

126 $(2x^4-a^2x^4-3a^4+1):(a+x^2)$ $[Q=-3a^3+3x^2a^2-4x^4a+4x^6;\ R=-4x^8+2x^4+1]$

127 $\left(6ax^4-\frac{2}{3}a^3x^2+a^5\right):\left(x-\frac{1}{3}a\right)$ $[Q=6ax^3+2a^2x^2;\ R=a^5]$

128 $(a^6-3a^2b^4-4a^4b^2+12b^6):(a+2b)$ $[Q=a^5-2a^4b-3ab^4+6b^5;\ R=0]$

129 $(x^3-xy^2+x^2y-y^3+2x^2-2y^2):(x+y)$ $[Q=x^2+2x-y^2-2y;\ R=0]$

Riepilogo: Divisione fra polinomi

130 VERO O FALSO?

a. Il polinomio x^4+x^2 non è divisibile per x^8+x. V F

b. x^4-1 è divisibile per x^2-1. V F

c. Il quoziente di $(2a^5+3a^3-2a):(a^2+2)$ è $2a^3-a$. V F

d. Dividendo due polinomi si può ottenere come risultato 1. V F

e. Il quoziente di una divisione di polinomi può essere il polinomio nullo. V F

131 Scrivi un polinomio in a di quinto grado divisibile per $a+1$.

132 Scrivi un polinomio in x di quarto grado divisibile contemporaneamente per $x+1$ e per $\frac{1}{2}x^2+2$

133 Scrivi il dividendo della divisione per il binomio $2x-1$ il cui quoziente è $5x^2-2$ e il cui resto è $\frac{1}{3}$. $\left[10x^3-5x^2-4x+\frac{7}{3}\right]$

134 TEST Nella divisione $(4x^2 - 15x - 2):(4x + 1)$ il quoziente è $x - 4$ e il resto è 2.

Nella divisione $\left(x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{1}{2}\right):\left(x + \frac{1}{4}\right)$ il quoziente e il resto sono, rispettivamente:

A $\frac{1}{4}x - 1$ e $\frac{1}{2}$.

B $\frac{1}{4}x - 1$ e 2.

C $x - 4$ e 2.

D $x - 4$ e $\frac{1}{2}$.

E $x + \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Esegui le seguenti divisioni applicando, quando è possibile, la regola di Ruffini.

135 $(t^4 - 3t^2 + t - 1):(t + 2)$ $[Q = t^3 - 2t^2 + t - 1; R = 1]$

136 $(x^6 + 4x^4 + x^3 + 6x):(-x^3 + 2x - 1)$ $[Q = -x^3 - 6x; R = 12x^2]$

137 $(b^4 - 2b^2 + 3):(b - 2)$ $[Q = b^3 + 2b^2 + 2b + 4; R = 11]$

138 $(5x^3 - 3x^2 + 4x - 2):(x - 1)$ $[Q = 5x^2 + 2x + 6; R = 4]$

139 $(x^3 - 3x + 2):(x + 2)$ $[Q = x^2 - 2x + 1; R = 0]$

140 $a^4:(a^2 - 3a + 2)$ $[Q = a^2 + 3a + 7; R = 15a - 14]$

141 $(y - 5y^3 + 2):(y^2 + y)$ $[Q = -5y + 5; R = -4y + 2]$

142 $(2x^3 - 13x^2 + 4 + 19x):(x - 4)$ $[Q = 2x^2 - 5x - 1; R = 0]$

143 $\left(7a^3 + \frac{27}{2}a^2 + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}a\right):\left(a + \frac{3}{2}\right)$ $[Q = 7a^2 + 3a + 1; R = 0]$

144 $(12a^2 + 5a - 2):(4a - 1)$ $[Q = 3a + 2; R = 0]$

145 $(4x^3 - 2x^2 - 3x + 1):(x^2 - 3x + 1)$ $[Q = 4x + 10; R = 23x - 9]$

146 $(a^3 + 3a^2 + 5a + 2):(a^2 - a + 1)$ $[Q = a + 4; R = 8a - 2]$

147 $\left(\frac{1}{4}x^5 - 4x^3 + 8x + 2\right):(x - 2)$ $\left[Q = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - 6x - 4; R = -6\right]$

148 $\left(4a^4 + 2a^2 + 4a^3 + a + \frac{1}{4}\right):\left(a + \frac{1}{2}\right)$ $\left[Q = 4a^3 + 2a^2 + a + \frac{1}{2}; R = 0\right]$

149 $(9x^5 - 21x^3 - 27x + 24):(3x + 6)$ $[Q = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 10x + 11; R = -42]$

150 $\left(\frac{1}{3}a^4 + \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{2}a^3 - 1\right):(a^2 - 1)$ $\left[Q = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}a + 1; R = \frac{1}{2}a\right]$

151 $(2k^4 - 5k^3 - k^2 + k + 4):(2k + 1)$ $[Q = k^3 - 3k^2 + k; R = 4]$

152 $(x^5 - 5x^4 + 3x - 2):\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)$ $\left[Q = x^2 - 5x; R = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right]$

ESERCIZI

153 $(4y^4 - 6y^3 - 18y^2 - 10) : (2y - 6)$ $[Q = 2y^3 + 3y^2; R =$

154 $\left(\frac{1}{2}a^5 - \frac{1}{2}a^4 - a^2 - \frac{2}{9}a^3 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{18}\right) : \left(a + \frac{1}{3}\right)$ $\left[Q = \frac{1}{2}a^4 - \frac{2}{3}a^3 - a - \frac{1}{6}; R\right.$

155 $\left(a^3 - \frac{27}{8}b^6\right) : \left(a - \frac{3}{2}b^2\right)$ [variabile: a] $\left[Q = a^2 + \frac{3}{2}ab^2 + \frac{9}{4}b^4; R\right.$

156 $(x^6 + x^2y^2 - x^4y - y^3) : (y - x^2)$ [variabile: y] $[Q = -y^2 - x^4; R$

157 $\left(a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 3a^2x + ax^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2}x^2\right) : \left(a + \frac{1}{2}\right)$ $[Q = a^2 - 3ax + x^2; R$

Semplifica le seguenti espressioni.

158 $[(1 + 3x)^2 - 5 + (x^3 - 8) : (x - 2)] : (-2x)$ $[-5x$

159 $[(2t^2 - 3 - 5t) : (2t + 1) + 2(t + 9)] : (t + 5)$

160 $[2 + (4x^4 + x^3 + 16x^2 - 4x - 2) : (4x + 1) - 7x] : (x^2 - 3)$

161 $[(2k^2 + 11k + 15) : (k + 3) + 3 - k^2] : (4 - k)$ $[k$

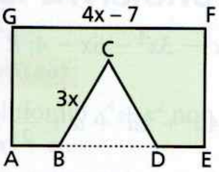
162 $[(y^5 + 1) : (y + 1) - (y^3 - 1) : (y - 1) - 4] : (y - 2)$ $[y^3 + y^2 + 2y$

163 Dati i polinomi $A(x) = (x^9 - 1)(x + 1)$ e $B(x) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)$ e trovato il polinomio $P(x)$ tale $P(x)B(x) = A(x)$, calcola $P(1)$.

164 Considera il polinomio $A(x) = x^3 - 2x^2$ e calcola $\left[A(-a) - \frac{1}{2}A(2a) + 6A(a)\right] : (2a^2)$. $\left[\frac{1}{2}a\right.$

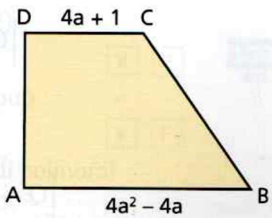
165 Dato il polinomio $P(x) = +x^2 - 3x$, trova quoziente e resto della divisione $[2P(k) + P(1 + k) + P(k^2)] : (k - 2$
$[Q = k^3 + 2k^2 + 4k + 1; R =$

166 In un triangolo ABC l'area e l'altezza BH relativa al lato AC misurano rispettivamente $a^3 + 4a^2 + 4a +$ $a + 3$, con $a > 0$. Trova la misura di AC. $[2a^2 + 2a +$

167 

L'area del rettangolo $AEFG$ è $4x^2 - 19x + 21$. Determina il perimetro di $ABCDEFG$, sapendo che il triangolo BCD è equilatero. $[13x - 20]$

168 Trova l'altezza del trapezio $ABCD$, sapendo che la sua area misura $2a^3 + 6a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}$, con $a > 1$.



MATEMATICA AL COMPUTER

Applichiamo Ruffini Con Wiris, costruiamo un blocco che, letto il polinomio $P(x) = 2x^4 + kx^3 + 5x^2 - 7x + 3$, contenente il parametro k fra i suoi coefficienti, e assegnato il valore $a = \frac{1}{2}$, usa la regola di Ruffini per visualizzare i coefficienti del polinomio quoziente $P(x) : (x - a)$ e l'eventuale resto.

Problema e risoluzione – 3 esercizi in più

3 Teorema del resto e teorema di Ruffini

▶ Teoria a p. 5

Teorema del resto

169 VERO O FALSO? Dato il polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8$, allora:

a. $P(2) = 12$. V F

b. $P(-2)$ è il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-2)$. V F

c. il resto della divisione di $P(x)$ per $(x+1)$ è 3. V F

d. 8 è il resto della divisione di $P(x)$ per x. V F

170 ESERCIZIO GUIDA Troviamo il resto della divisione $\left(-2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1\right) : (x+2)$.

Consideriamo $x + 2 = x - (-2)$. Se chiamiamo $P(x)$ il dividendo, il resto R è:

$$R = P(-2) = -2(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 3(-2) - 1 = +16 - 2 - 6 - 1 = 7.$$

Calcola il resto delle seguenti divisioni senza eseguirle.

171 $(2x^3 - 9x + 1) : (x - 3)$

172 $(a^2 - a + 3 - 2a^3) : (a - 1)$

173 $(2a^3 + 3a^2 - a - 3) : (a + 3)$

174 $(3k^3 - 5k^2 + k - 1) : (k - 2)$

175 $(2x^4 + 3x + 1) : (x + 1)$

176 $\left(\frac{1}{2}y^5 - y^3 + 2y - 4\right) : (y + 2)$

177 $\left(96t^5 - 4t^3 + \frac{2}{3}t^2 - 1\right) : \left(t - \frac{1}{2}\right)$

178 $(5b^6 + 15b^5 + 20 + 5b) : (b + 3)$

179 $\left(2x^3 - \frac{11}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{3}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

180 $(2x^3 - 5x + 4) : (x + 1)$

181 $(2x^4 + x^3 - 6x + 1) : (x - 1)$

182 $(-x^3 + 2x^2 - 2) : (x + 2)$

183 $(2y^5 + y^2 - y - 26) : (y - 2)$

184 $\left(a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2} + \frac{7}{4}a - 2a^2\right) : (a + 2)$

YOU & MATHS

185 **Invent a quadratic** Find possible values for a, b, and c in the polynomial $ax^2 + bx + c$ such that the remainder of $(ax^2 + bx + c) : (x - 1)$ is 0.

186 **Which are divisors?** Consider the polynomial $P(x) = 4x^2 + 5x - 6$. Which of the following polynomials are divisors of $P(x)$?

a. $x + 1$ b. $4x - 3$ c. $x + 2$ d. $x - 2$

Determina il valore di a in modo che la divisione abbia il resto indicato a fianco.

187 $(x^2 - ax - 1) : (x - 2)$, $R = 1$. $[a = 1]$

188 $(x^3 + ax^2 + 4x - 1) : (x - 1)$, $R = 0$. $[a = -4]$

189 $(2x^3 + x^2 - 8x + a + 1) : (x + 3)$, $R = 2$. $[a = 22]$

190 TEST La divisione $(x^2 + x - a^2 - 1) : (x - a)$ ha resto 0 se a è uguale a:

A 1. B -1. C 0. D 2. E -2.

ESERCIZI

Teorema di Ruffini

191 TEST Per quale dei seguenti binomi è divisibile il polinomio $2x^3 + x^2 - 5x + 2$?

A $2x + 1$ B $3x + 2$ C $x + 2$ D $x + 1$ E $x - 2$

Determina, senza eseguire la divisione, se i seguenti polinomi sono divisibili per i binomi scritti a fianco.

192 $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; $x + 1$, $x - 1$, $x + 2$, $x - 3$.

193 $x^3 - 9x^2 + 19x - 6$; $x - 2$, $x - 6$, $x + 1$, $x - 1$.

194 $x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 10$; $x - 5$, $x - 1$, $x + 1$, $x - 2$.

195 $2a^2 + 7a - 4$; $a + 2$, $a + \frac{1}{2}$, $a - 1$, $a - \frac{1}{2}$.

196 $2a^4 - 3a^2 + 2a - 1$; $a + 1$, $a - \frac{1}{2}$, $a + \frac{2}{3}$, $a - 1$.

197 $\frac{1}{27}x^3 - 1 - \frac{1}{3}x^2 + 4x$ $x + 3$, $x - 1$, $x - 3$, $x + 1$.

Verifica se il polinomio è divisibile per il binomio scritto a fianco e, in caso affermativo, calcola il quoziente.

198 $a^3 - 2a^2 + 3a - 6$ $a - 2$

199 $a^4 - 5a^2 + 8a - 208$ $a - 4$

200 EUREKA! Senza eseguire la divisione, verifica che il polinomio $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ è divisibile $(x + 2)(x + 1)$, ma non per $(x + 2)(x + 3)$.

Trova il valore di k affinché i polinomi indicati siano divisibili per il binomio a fianco.

201 $a^4 - 2a^3 + ka - 1$ $a - 2$

202 $3kx^2 + 5kx - 24$ $x + 3$

203 $8a^3 + 4a^2 - 12a + k$ $2a - 3$

204 $x^4 + ka^2x^2 - 5a^3x + a^4$ $x - a$

205 EUREKA! **Quali coppie?** Per quali, tra le seguenti coppie di valori di a e b, il binomio $P(x) = ax^2 + b$ risu divisibile per il binomio $x - 2$?

a. $a = 1$, $b = 4$. b. $a = -2$, $b = 8$. c. $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$.

Quale relazione deve esserci tra a e b affinché si realizzi la divisibilità richiesta? [b) e c); $b = -4$

4 Scomposizione in fattori

206 VERO O FALSO?

a. Il polinomio $x(4 + x) + 1$ è scomposto in fattori. V

b. $(3x^2 + 1)(1 - x)$ è la scomposizione in fattori di $3x^2 - 3x^3 + 1 - x$. V

c. La scomposizione di un polinomio $P(x)$ è il prodotto di più polinomi dello stesso grado di $P(x)$. V

d. Tutti i polinomi si possono scomporre in fattori. V

Raccoglimento totale

▶ Teoria a p

207 TEST Nel polinomio $3x^3 + 6x^2 - 15x$ possiamo raccogliere il MCD di tutti i termini, che è:

A $15x$. B x. C $3x^2$. D $3x$. E $3x^3$.

208 TEST In quale polinomio possiamo raccogliere il fattore comune $4b$?

A $5b^2 + 4$ B $16b - 8b^2$ C $20b - 8$ D $4b^3 + 8b + b^2$ E $4b^4 - 20$

209 ESERCIZIO GUIDA Scomponiamo in fattori:

a. $3y^2 - 15y + 9y^3$; b. $6ab^2 + 10a^2$; c. $8(x+6) - x(x+6)$.

a. Raccogliamo il MCD di tutti i termini: MCD $= 3y \rightarrow 3y^2 - 15y + 9y^3 = 3y(y - 5 + 3y^2)$.

Osservazione. Il secondo fattore si ottiene dividendo ogni termine del polinomio per $3y$.

b. Raccogliamo il MCD di tutti i termini: MCD $= 2a \rightarrow 6ab^2 + 10a^2 = 2a(3b^2 + 5a)$.

c. Il fattore comune è $(x+6) \rightarrow 8(x+6) - x(x+6) = (x+6)(8-x)$.

COMPLETA

210 $-15x + 20 = -5(\square - \square)$

211 $10a^2 + 16ay = \square(5a + \square)$

212 $9y^3 - 27y^2 = \square y^2(\square + 3)$

213 $24b^4x + 9b^2x^2 = 3b^{\square}x^{\square}(\square b^2 + \square)$

214 $4a^8 - 6a^2 = 2a^{\square}(\square - 3)$

215 $\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{2}xy = \frac{1}{4}\square(x + \square)$

Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune.

216 $7a + 14a^2$; $a^4x^4 - a^4y^4$.

217 $4x + 8x^2$; $\frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^2$.

218 $a^5 + a^6 + a^9$; $2b + 2^2b^3 - 4b^2$.

219 $5x - 10xy + 15y$; $-27a^2 - 18a$.

220 $-2a^2 + 4ab - 2a^3$; $cx^2 - 4cx + c^2x^2$.

221 $3a + 9a^3 - 15$; $4a^4 - 2a^3 - 2a^6$.

222 $6ax + 2a - 4a^2x^2$; $125x^2 - 25x + 25xy$.

223 $\frac{2}{3}a^2y^3 + \frac{1}{3}ay^2$; $4x - 2x^2 - 2$.

224 $18a^3y - 4a^4y^3 + 10a^5y^2$; $4x^3 + 3x^2y$.

225 $5a^2b - 15ab^2 + 3ab$; $4x^9 - 2x^6 + x^3$.

226 $15a^4 + 6a^2b + 3a$; $2ac + 14ab$.

227 $3z^2 - 27y^3z + 12y^2z^2$; $12x^3y^2 + 3x^2y^2$.

228 $x(a+b) + y(a+b)$; $a^2(2a+b) - b^2(2a+b)$.

229 $3(2x+y) + (2x+y)^3$; $(3a+2) - (3a+2)^2$.

230 $y^2 + 4y$; $a^5 - 6a^4b$.

231 $2ay - 4a^2 + 2a$; $4x^2y^3 - \frac{1}{4}x^3$.

232 $\frac{1}{4}a^3b - \frac{1}{8}a^2$; $14z^7y^4 - 7y^6$.

233 $-6a^3 + 9a^2b + 3a^2$; $72b^8y + 64b^9$.

234 $6xy^2 - 4x^2 + 10xy$; $\frac{15}{7}x^3 + \frac{1}{3}x^2y$.

235 $-3a^5 + 12a^3b - 6a^2$; $8xyz - 12x^2y^2$.

236 $12a^2b^3 + 30a^3b + 6ab$; $28z^4 - 16y^2z^2$.

237 $\frac{2}{5}ax^2 + \frac{4}{5}a$; $2(x+2) - x^2(x+2)$.

238 $-2a^9 + 8a^4 + 2a^3$; $b(1-a) + 2(1-a)$.

239 $a^3 - a^2 - a + 2a^2$; $7b^7 + 6b^6 + 5b^5$.

240 $(b+c) - a(b+c)$; $x^2(1+2x^2) + \frac{1}{2}(1+2x^2)$.

241 CACCIA ALL'ERRORE

a. $x^2 + x^3 + x = x(x + x^2)$

b. $15b^6 - 10b^3 = 5b^3(3b^2 - 2)$

c. $6(x+y) - (x+y)(x+4) = (x+y)(6 - x + 4)$

d. $8x^2y^3 + 10x^3y^2 = 2x^2y^2(4x + 5y)$

242 YOU & MATHS **Prove it!** Use algebra to prove that $(x^2+x)(x-1)$ divided by $x+1$ gives x^2-x, as long as $x \neq -1$, $x \neq 0$.

Raccoglimento parziale

▶ Teoria a p

243 ESERCIZIO GUIDA Scomponiamo in fattori: a. $2+4a+3a^2+6a^3$; b. $12y+15x+5x^2+4xy$.

a. $2+4a+3a^2+6a^3 = 2(1+2a)+3a^2(1+2a) = (1+2a)(2+3a^2)$

raccogliamo parzialmente — raccogliamo $(1+2a)$

b. $12y+15x+5x^2+4xy = 4y(3+x)+5x(3+x) = (3+x)(4y+5x)$

raccogliamo parzialmente — raccogliamo $(3+x)$

Scomponi in fattori mediante il metodo del raccoglimento parziale.

244 y^4-y^3-2y+2

245 $10bx+x-30b-3$

246 $b^5+5b^3+2b^2+10$

247 $3a^2-2a^3+18-12a$

248 x^3-2x^2-3x+6

249 $a^2+ab^2+ab+b^3$

250 $a^2b^2+2b^2+2a^2+4$

251 $4xy^2-3y+20xy-15$

252 $12a^2-4a-3a+1$

253 $3bx+4by+3ax+4ay$

254 $15by-10b+21ay-14a$

255 $ax+6x+ay+6y$

256 $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}xy-3a+ay$

257 $x^2+xy+x+y$

258 $ay-4a-3y+12$

259 $2ax+4x-3a-6$

260 $x^4+4x^2-x^3y-4xy$

261 $xy-5x-3y+15$

262 $8b^2-ab^2+8-a$

263 $mn+3n-8m-24$

264 $3x^3y-6x^2y+xy^2-2y^2$

265 $2a^3b^2-12a^2b^4+4ab^6-24b^8$

266 $-8x^2y+4xy^2+6ax^2y-3axy^2$

267 $by-7by^2+14x^2y-2x^2$

268 $(2a+1)^2+4a+2$

269 $(2a+x)^2-4x^3-8ax^2$

270 $(5-x)(5+x)+(x-5)^2+(2x-10)(x+3)$

Trinomio speciale

▶ Teoria a p. 8

Il trinomio x^2+sx+p

se $x_1+x_2=s$ e $x_1\cdot x_2=p$:
$x^2+sx+p=(x+x_1)\cdot(x+x_2)$

271 ASSOCIA a ciascun polinomio la sua scomposizione in fattori, senza eseguire la moltiplicazione.

a. x^2+3x+2 **b.** x^2-4x+3 **c.** $x^2-10x+24$ **d.** $x^2+3x-10$

1. $(x-1)(x-3)$ **2.** $(x+5)(x-2)$ **3.** $(x+2)(x+1)$ **4.** $(x-4)(x-6)$

272 ESERCIZIO GUIDA Scomponiamo in fattori $x^2-2x-15$.

Cerchiamo due numeri x_1 e x_2 tali che: $x_1+x_2=-2$ e $x_1\cdot x_2=-15$.

Partiamo dal prodotto. Le coppie di numeri interi che hanno come prodotto -15 sono le seguenti.

$(-15)\cdot(+1) \rightarrow$ somma: $-15+1=-14$ $\quad$ $(-3)\cdot(+5) \rightarrow$ somma: $-3+5=+2$

$(-1)\cdot(+15) \rightarrow$ somma: $-1+15=+14$ $\quad$ $(-5)\cdot(+3) \rightarrow$ somma: $-5+3=-2$

Quindi: $x_1=-5$ e $x_2=+3 \rightarrow (x^2-2x-15)=(x-5)(x+3)$.

Scomponi in fattori i seguenti trinomi.

273 x^2+x-20; $\quad x^2+10x+21$.

274 x^2-x-6; $\quad y^2-7y+10$.

275 a^2-a-30; $\quad x^2+7x-18$.

276 $-x^2+x+2$; $\quad m^2+6m-16$.

277 x^2-x-12; $\quad x^2+3x-4$.

278 $b^2+3b-10$; $\quad x^2+5x+6$.

279 b^2+6b-7; $\quad x^2+12x+32$.

280 $x^2+7x-30$; $\quad a^2-15a-16$.

281 $x^2+18x+80$; $\quad y^2-13y+42$.

282 $a^2+2a-48$; $\quad b^2-12b+35$.

---

283 **COMPLETA**

a. $x^2-7x+6=(x\,\square\,\square)(x\,\square\,\square)$

b. $x^2+\square+10=(x+1)(x+\square)$

c. $x^2-11x+\square=(x-\square)(x-2)$

d. $x^2+\square-\square=(x-4)(x+5)$

284 **EUREKA!** Scomponi in fattori il trinomio $x^2+2ax-3a^2$.

Il trinomio ax^2+bx+c

285 Luca, dopo aver pensato a come scomporre il polinomio $3x^2-2x-1$, conclude: «Non è scomponibile come trinomio speciale! L'unica coppia di numeri che per prodotto ha -1 è -1 e 1, ma la loro somma non è -2». Francesca, che studia con lui, non è d'accordo. Tu cosa ne pensi?

286 **ESERCIZIO GUIDA** Scomponiamo in fattori: $2a^2+3a-2$.

Moltiplichiamo tra loro il coefficiente di secondo grado e il termine noto: $2\cdot(-2)=-4$.

Cerchiamo due numeri che abbiano come somma $+3$ e come prodotto il numero appena ottenuto, cioè -4; sono 4 e -1:

$$2a^2+\underbrace{3a}_{3a\,=\,4a\,-\,a}-2=2a^2+4a-a-2=\underbrace{2a(a+2)-(a+2)}_{\text{raccogliamo parzialmente}}=(a+2)(2a-1).$$

Scomponi i seguenti trinomi.

287 $3a^2+8a-3$; $\quad 4x^2+7x+3$.

288 $4y^2-3y-10$; $\quad 2c^2+13c+15$.

289 $4b^2+15b-4$; $\quad 3x^2-4x-4$.

290 $7x^2-19x-6$; $\quad 2a^2-3a-20$.

291 $9y^2-28y+3$; $\quad 8x^2+13x-6$.

292 $2b^2-15b+28$; $\quad 3m^2+14m+16$.

Scomposizioni con prodotti notevoli

▶ Teoria a p

Differenza di due quadrati $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

293 ESERCIZIO GUIDA Scomponiamo in fattori:

a. $81a^2 - 16$; b. $625a^4 - 1$.

a. $81a^2 - 16 = (9a)^2 - (4)^2 = (9a+4)(9a-4)$

$A = 9a;\ B = 4$

b. $625a^4 - 1 = (25a^2+1)(25a^2-1) = (25a^2+1)(5a+1)(5a-1)$

Scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati.

294 $49 - x^2$; $81 - b^2$.

295 $a^2 - 4$; $\frac{1}{16} - x^2y^2$.

296 $y^6 - 81$; $64 - a^2b^2$.

297 $25y^2 - x^2$; $9a^4 - 25b^4$.

298 $36x^2y^2 - 81$; $1 - \frac{1}{64}x^4$.

299 $4x^4 - x^2$; $25y^2 - 64y^4$.

300 $100a^2 - x^2$; $\frac{4}{49}m^2 - 1$.

301 $\frac{1}{9}x^2 - a^2b^2$; $36a^4 - 49$.

302 $9 - 121x^4$; $16a^4 - 9$.

303 $\frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{36}y^2$; $a^4b^4 - \frac{1}{49}$.

304 $a^8 - 64b^8$; $9x^2 - 81y^2$.

305 $16x^2y^2 - 25$; $\frac{1}{9}x^2 - 25$.

306 $49y^4 - 25x^4$; $64x^2y^2 - 1$.

307 $-100a^2 + 9$; $-a^2b^4 + 144$.

308 $\frac{36}{49}x^4 - \frac{1}{16}y^2$; $0{,}25a^2 - 4b^2$.

309 $x^6 - \frac{1}{9}y^4$; $\frac{16}{625}a^{12} - 1$.

310 $1 - b^8y^{10}$; $x^2y^4z^6 - 1$.

311 $256x^4y^4 - 1$; $(a+b)^2 - a^2$.

COMPLETA

312 $16b^2 - \square = (\square + 3)(\square - 3)$.

313 $\square - 144 = (a^3 + \square)(a^3 - \square)$.

314 $4y^6 - \square = (2\square + 1)(2\square - \square)$.

315 $a^4 - \square\, x^2 = (\square + 6x)(\square - \square)$.

Quadrato di un binomio $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$

316 ESERCIZIO GUIDA Scomponiamo in fattori: a. $4x^2 + 20x + 25$; b. $4a^2b^2 - 4ab^2 + b^2$.

a. $\underbrace{4x^2}_{\text{quadrato di } 2x} + 20x + \underbrace{25}_{\text{quadrato di } 5}$

Controlliamo che $20x$ sia il doppio prodotto di $2x$ e 5: $2 \cdot (2x) \cdot 5 = 20x$.

$4x^2 + 20x + 25 = (2x+5)^2$

b. $4a^2b^2 - 4ab^2 + b^2 = b^2(4a^2 - 4a + 1)$

raccogliamo b^2 quadrato di $2a$ quadrato di 1

Il secondo fattore è il quadrato di un binomio se $-4a$ è il doppio prodotto. Controlliamo:

$2 \cdot (-2a) \cdot 1 = -4a$, oppure $2 \cdot (2a) \cdot (-1) = -4a$.

Quindi:

$4a^2b^2 - 4ab^2 + b^2 = b^2(1 - 2a)^2$, oppure $4a^2b^2 - 4ab^2 + b^2 = b^2(2a - 1)^2$.

CACCIA ALL'ERRORE **Trova gli errori e spiega perché le uguaglianze sono sbagliate.**

317 $a^2 + b^2 = (a + b)^2$

318 $x^2 - 9xy - 9y^2 = (x - 3y)^2$

319 $\frac{1}{16}a^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}a + y\right)^2$

320 $4x^2 + 9 - 16x = (2x - 3)^2$

321 $a^4 + 8a^2x^2 + 4x^4 = (a^2 + 2x^2)^2$

322 $\frac{1}{9} + \frac{1}{36}y + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right)^2$

Scomponi in fattori riconoscendo il quadrato di un binomio.

323 $x^4 + 4x^2 + 4$; $\quad 16a^2 + 8a + 1$.

324 $4x^2 - 8xy + 4y^2$; $\quad 9a^2 + 6ab + b^2$.

325 $4x + 4x^2 + 1$; $\quad 36 - 24x + 4x^2$.

326 $b^2 + \frac{1}{25}a^2 - \frac{2}{5}ab$; $\quad x^2 + \frac{1}{49} + \frac{2}{7}x$.

327 $b^2x^2 + 2abx + a^2$; $\quad 16a^2 + 8ab^2 + b^4$.

328 $x^3 + 16x^2y + 64xy^2$; $\quad 5a^2 + 10ab + 5b^2$.

329 $a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2$; $\quad 8a^2 + 16ab + 8b^2$.

330 $a^2 - 22a + 121$; $\quad x^4 + 4x^2y + 4y^2$.

331 $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{16}y^2$; $\quad \frac{16}{9}x^2 + \frac{4}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$.

332 $a^2 + b^4 + 2ab^2$; $\quad 9x^2y^4 + 6xy^2 + 1$.

333 $16b^2 + 40b + 25$; $\quad 4 + 20x + 25x^2$.

334 $x^4 + 16x^2 + 64$; $\quad 1 + 14a + 49a^2$.

335 $25x^2 + 70x + 49$; $\quad 25 - 60y + 36y^2$.

336 $a^2 - 8a + 16$; $\quad 9a^2 - 24ab + 16b^2$.

337 $4ab + b^2 + 4a^2$; $\quad 81x^2y^2 - 18xy + 1$.

338 $-x^2 - 8x - 16$; $\quad 49b^4 + 28b^2 + 4$.

339 $30x - 9 - 25x^2$; $\quad b + 8ab^2 + 16a^2b^3$.

340 $8 - 24x + 18x^2$; $\quad x^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y^4$.

341 $\frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{9}{4}b^2$; $\quad \frac{25}{16}x^4 + \frac{5}{6}x^2y + \frac{1}{9}y^2$.

342 $\frac{1}{9}x^2y^2 - \frac{8}{3}xy + 16$; $\quad 121x^4 - 66x^2y^3 + 9y^6$.

343 **TEST** Quale tra i seguenti polinomi *non* è il quadrato di un binomio?

A $16x^4 + 8x^2 + 1$ **B** $y^2 - 32y + 16$ **C** $\frac{1}{4}x + x^2$ **D** $25x^2 + 10xy^2 + y^4$ **E** $4 + a + \frac{1}{16}a^2$

344 **RIFLETTI SULLA TEORIA** Leonardo: «$-4x^2 + 40x - 100$ non può essere lo sviluppo del quadrato di un binomio, perché $-4x^2$ e -100 sono negativi». Angela: «Certo, però non è tanto diverso». Hai capito a cosa sta pensando Angela?

345 **COMPLETA**

a. $9x^2 + \square + 49 = (\square + \square)^2$

b. $16a^2b^2 + 8ab + \square = (\square + \square)^2$

c. $25x^4 + \square + 4 = (\square + \square)^2$

d. $81 - 36b^2 + \square = (\square - \square)^2$

346 **RIFLETTI SULLA TEORIA** Se al quadrato di un numero naturale aggiungiamo 1 e il doppio del numero stesso, troviamo il quadrato del suo successivo. Spiega perché.

Quadrato di un trinomio

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2$$

347 ESERCIZIO GUIDA Scomponiamo in fattori $9b^2 + 4a^2 - 8a + 12b + 4 - 12ab$.

Il polinomio ha sei termini di cui tre sono dei quadrati, quindi può essere il quadrato di un trinomio:

$$\underbrace{9b^2}_{\text{quadrato di } 3b} + \underbrace{4a^2}_{\text{quadrato di } 2a} - 8a + 12b + \underbrace{4}_{\text{quadrato di } 2} - 12ab.$$

Controlliamo che gli altri tre termini possano essere i tre doppi prodotti esaminando i loro valori assoluti:

$$9b^2 + 4a^2 - \underbrace{8a}_{2 \cdot 2a \cdot 2} + \underbrace{12b}_{2 \cdot 2 \cdot 3b} + 4 - \underbrace{12ab}_{2 \cdot 3b \cdot 2a}.$$

Studiamo i segni: $9b^2 + 4a^2 \underbrace{-}_{2a \text{ e } 2 \text{ discordi}} 8a + \underbrace{12b}_{2 \text{ e } 3b \text{ concordi}} + 4 \underbrace{-}_{3b \text{ e } 2a \text{ discordi}} 12ab.$

Abbiamo due possibilità, che sono equivalenti:

$$9b^2 + 4a^2 - 8a + 12b + 4 - 12ab = (3b - 2a + 2)^2 = (-3b + 2a - 2)^2.$$

Scomponi in fattori riconoscendo il quadrato di un trinomio.

348 $9a^2 + 4b^2 + 4 + 12ab - 8b - 12a$

349 $x^2 + 4y^2 - 4xy + 16 + 8x - 16y$

350 $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9} + 2ab + 4b^2 + \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b$

351 $1 + 6y + 9y^2 - 2xy + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x$

352 $4ab + 8a + 4a^2 + b^2 + 4 + 4b$

353 $16x^2 + 8xy + 1 + y^2 - 8x - 2y$

354 $8a - b + 4a^2 + \frac{1}{16}b^2 + 4 - ab$

355 $4y^2 + 8xy - 12x - 12y + 4x^2 + 9$

356 $x^4 + 4x^2y - 2x^2z^3 - 4yz^3 + 4y^2 + z^6$

357 $\frac{b^2}{4} + c^2 + d^4 + bc - bd^2 - 2cd^2$

358 Quale termine occorre aggiungere al polinomio $\frac{1}{4}x^2 + x^2y^4 + x^2y^2 + \frac{1}{2}x + xy^2$ in modo che sia il quadra
di un trinomio?

Cubo di un binomio

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

359 ESERCIZIO GUIDA Scomponiamo in fattori $8y^3 - 27 - 36y^2 + 54y$.

Il polinomio ha quattro termini di cui due sono dei cubi, quindi può essere il cubo di un binomio:

$$\underbrace{8y^3}_{\text{cubo di } 2y} - \underbrace{27}_{\text{cubo di } -3} - 36y^2 + 54y.$$

Controlliamo che gli altri due termini siano i tripli prodotti:

$$8y^3 - 27 - \underbrace{36y^2}_{3 \cdot (2y)^2 \cdot (-3)} + \underbrace{54y}_{3 \cdot 2y \cdot (-3)^2}.$$

Quindi: $8y^3 - 27 - 36y^2 + 54y = (2y - 3)^3$.

COMPLETA

360 $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = (b - \square)^3$.

361 $1 + 6y + 12y^2 + 8y^3 = (\square + \square)^3$.

362 $x^3 + \square + \square + 27 = (x + 3)^3$.

363 $1 - 27a^3 - 9a + 27a^2 = (\square - \square)^3$.

Scomponi in fattori riconoscendo il cubo di un binomio.

364 $-8b^3 + 12ab^2 - 6a^2b + a^3$; $\quad x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

365 $y^3 + 3y - 1 - 3y^2$; $\quad 27 - 27a + 9a^2 - a^3$.

366 $27x^3 + y^3 + 27x^2y + 9xy^2$; $\quad -\frac{1}{27}a^3 + b^3 + \frac{1}{3}a^2b - ab^2$.

367 $-3x^2y^2 - y^3 - 3x^4y - x^6$; $\quad 48y - 12y^2 + y^3 - 64$.

368 $a^3 + 125 + 15a^2 + 75a$; $\quad +36x^2y + 27y^3 + 54xy^2 + 8x^3$.

369 $a^3 + \frac{3}{4}ab^2 - \frac{1}{8}b^3 - \frac{3}{2}a^2b$; $\quad -3b + 12b^2 - b^3 + 8$.

370 $24x^2y + 8y^3 + 8x^3 + 24xy^2$; $\quad -3y^2x^2 + 3yx + y^3x^3 - 1$.

371 $a^6 + 3a^4b^2 + b^6 + 3a^2b^4$; $\quad 8x^3 + 27 + 36x^2 + 54x$.

Somma o differenza di cubi $\quad \boldsymbol{A^3 \pm B^3 = (A \pm B) \cdot (A^2 \mp AB + B^2)}$

372 **ESERCIZIO GUIDA** Scomponiamo in fattori: a. $27x^3 + y^3$; b. $1 - \frac{1}{8}b^3$.

a. $27x^3 + y^3 = (3x)^3 + y^3 = (3x + y)[(3x)^2 - 3x \cdot y + y^2] = (3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

b. $1 - \frac{1}{8}b^3 = 1^3 - \left(\frac{1}{2}b\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{2}b\right)\left[1^2 + 1 \cdot \frac{1}{2}b + \left(\frac{1}{2}b\right)^2\right] = \left(1 - \frac{1}{2}b\right)\left(1 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2\right)$

Scomponi in fattori, riconoscendo la somma o la differenza di due cubi.

373 $x^3 + 27$; $\quad y^3 + 125$.

374 $64a^3 - 27b^3$; $\quad a^6 + 1$.

375 $x^{18} - y^9$; $\quad x^3y^3 + 8$.

376 $a^3 - \frac{1}{27}$; $\quad 64 - t^3$.

377 $2y + 54y^4$; $\quad a^3b^3 - 27$.

378 $6b^6a^6 - 6$; $\quad 27x^9 - y^9$.

379 $\frac{8}{125}a^3 - b^3$; $\quad 81x^3 - 1$.

380 $\frac{8}{81}a^3 - 1$; $\quad 64x^3 - 8$.

381 $27x^4 + x$; $\quad \frac{1}{125}t^3 - m^3$.

382 $125x^9y^6 - 1$; $\quad \frac{5}{8} + 40x^3$.

383 $\frac{1}{3}b^3 + \frac{27}{24}a^3$; $\quad 8a^5 + a^8$.

384 $5a^5 + 40a^2$; $\quad (2 + a)^3 + 1$.

---

385 **RIFLETTI SULLA TEORIA** Il binomio $27x^3 + 8$ è divisibile per $3x + 2$? Perché?

386 **YOU & MATHS** **Using tricks** Use tricks to divide each given polynomial by the one proposed without actually setting up the division between polynomials.

a. Divide $x^6 - 1$ by $x^3 - 1$. **b.** Divide $x^3 + 27$ by $x^2 - 3x + 9$.

ESERCIZI

387 YOU & MATHS Which is a factor of $5x^4 - 135xy^3$?

A $x^2 + 6xy + 9y^2$ C $x^2 - 3xy + 9y^2$ E $x^2 - 6xy + 9y^2$

B $x^2 - 6xy - 9y^2$ D $x^2 + 3xy + 9y^2$

(USA *Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest,*

Scomposizione con il metodo di Ruffini

▶ Teoria a

388 VERO O FALSO?

a. Gli zeri razionali del polinomio $x^3 - 4x^2 + x - 4$ si trovano nell'insieme $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. V

b. -2 è uno zero del polinomio $2x^3 - 4x^2 - x - 2$. V

c. Gli zeri razionali del polinomio $2x^3 + x - 3$ si trovano nell'insieme $\left\{\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$. V

d. Se $P(x) = -x^3 - x - 2$, allora $P(-1) = 0$. V

e. $-a$ è uno zero del polinomio, nella variabile x, $x^3 - ax^2 - 2a^2x$. V

389 ESERCIZIO GUIDA Scomponiamo in fattori con il metodo di Ruffini: $P(a) = a^3 - 5a^2 + 3a + 9$.

Cerchiamo gli zeri di $P(a)$ tra i divisori del termine noto: $\pm 1; \pm 3; \pm 9$.

Calcoliamo: $P(1) = 1 - 5 + 3 + 9 \neq 0$;

$P(-1) = -1 - 5 - 3 + 9 = 0 \to a + 1$ è divisore di $P(a)$.

Eseguiamo la divisione:
$(a^3 - 5a^2 + 3a + 9) : (a + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & 3 & 9 \\ -1 & & -1 & 6 & -9 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array} \to Q(a) = a^2 - 6a + 9;\ R = 0.$$

Otteniamo la scomposizione: $a^3 - 5a^2 + 3a + 9 = (a^2 - 6a + 9)(a + 1) = (a - 3)^2(a + 1)$.

Scomponi in fattori, utilizzando la regola di Ruffini.

390 $5x^2 - 4x - 1$ $[(x - 1)(5x + 1)]$

391 $2a^3 - a^2 - 5a - 2$ $[(a + 1)(a - 2)(2a + 1)]$

392 $a^3 - 3a^2 + 4$ $[(a + 1)(a - 2)^2]$

393 $x^3 - x^2 + 2$ $[(x + 1)(x^2 - 2x + 2)]$

394 $y^4 + y^2 - 2$ $[(y - 1)(y + 1)(y^2 + 2)]$

395 $k^3 + 4k + 5$ $[(k + 1)(k^2 - k + 5)]$

396 $y^4 - y^3 + y^2 - 3y + 2$ $[(y - 1)^2(y^2 + y + 2)]$

397 $a^3 - 3a + 2$ $[(a - 1)^2(a + 2$

398 $x^3 - x^2 - 3x - 9$ $[(x - 3)(x^2 + 2x + 3$

399 $2b^3 + 5b^2 - 4b - 3$ $[(b - 1)(b + 3)(2b + 1$

400 $3b^3 - 4b^2 + 5b - 4$ $[(b - 1)(3b^2 - b + 4$

401 $t^3 - 39t + 70$ $[(t - 2)(t - 5)(t + 7$

402 $3a^3 - 2a^2 - 5a - 6$ $[(a - 2)(3a^2 + 4a + 3$

403 $x^3 - 3x - 2$ $[(x + 1)^2(x - 2$

404 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $[(x-1)(x+2)(x-3)]$

405 $4b + 16 + b^4 - 2b^3 - 10b^2$ $[(b+2)(b-4)(b^2-2)]$

406 $x^3 - x^2 + 2x - 8$ $[(x-2)(x^2+x+4)]$

407 $x^4 + 8x - x^3 - 8$ $[(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)]$

408 $y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 9y - 4$ $[(y-4)(y-1)(y^2+y-1)]$

409 $a^5 + 32$ $[(a+2)(a^4-2a^3+4a^2-8a+16)]$

410 $x^5 - x^4 - 10x^3 - 8x^2$ $[x^2(x+1)(x+2)(x-4)]$

411 $6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x$ $[x(x-1)(2x+1)(3x-1)]$

412 **TEST** $(x + 1)$ è un fattore della scomposizione di $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + k$ se k è uguale a:

A 0. B -1. C 1. D -2. E 2.

Riepilogo: Scomposizione in fattori

CACCIA ALL'ERRORE

413 $a^4 + a^3 + a^2 = a^2(a^2 + a)$

414 $9a^4 - b^{16} = (3a^2 - b^4)(3a^2 + b^4)$

415 $a^3b^3 + 1 = (ab + 1)(a^2b^2 + ab + 1)$

416 $-x^2 - 4y^2 - 4xy = (-x - 2y)^2$

417 $16x^2y^2 + 9z^4 = (4xy + 3z^2)^2$

418 $a^2 + 11a - 12 = (a + 1)(a - 12)$

419 **VERO O FALSO?**

a. $x^6 - 4ax^3 + 16a^2$ è il quadrato di un binomio. V F

b. $x^2 - 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1$ scomposto è $(x + y - 1)^2$. V F

c. Il polinomio $3x^2 + 5$ è irriducibile. V F

d. Il trinomio $x^2 - x - 56$ si scompone come trinomio speciale. V F

TEST

420 Quale delle seguenti uguaglianze è *vera*?

A $a^3 - 3a^2 - 1 - 3a = (a - 1)^3$

B $8x - 1 - 16x^2 = -(1 - 4x)^2$

C $9a^9 - b^4 = (3a^3 + b^2)(3a^3 - b^2)$

D $3m^2 + n + nm - 3m = (3m + n)(m - 1)$

E $a^2 + 4ab + 2a + 4b^2 - 4b + 1 = (a + 2b - 1)^2$

421 Quale dei seguenti trinomi *non* è il quadrato di un binomio?

A $4x^2 + 9a^2 + 12ax$

B $a^4 + 16x^4 + 4a^2x^2$

C $4a^2 + x^2 - 4ax$

D $25 + 20a + 4a^2$

E $9x^2 + 4 + 12x$

422 Il binomio $27a^3x^3 - 8a^3$ è scomponibile in uno solo dei seguenti modi. Quale?

A $(3ax - 2a)^3$

B $(-3ax + 2a)^3$

C $(3ax - 2a) \cdot (9a^2x^2 + 4a^2)$

D $(3ax - 2a) \cdot (9a^2x^2 - 12a^2x + 4a^2)$

E $a^3(3x - 2) \cdot (9x^2 + 6x + 4)$

Scomponi in fattori.

423 $25c^2 - 10c + 1$

424 $9a^2x^3 - 16x^3$

425 $k^6 + k^2 + 1 + 2k^3 + 2k + 2k^4$

426 $3m^2 + 5m - 2$

427 $2t^3 - 5t^2 - 11t - 4$

428 $\frac{25}{4} + 5t + t^2$

429 $6x - 3ax + 2a - a^2$

430 $16x^5y^2 - 4x^3$

431 $64c^3 - 1$

432 $4b^4 - 9$

433 $25 + 9x^2 - 30x$

434 $1 - 9y + 27y^2 - 27y^3$

435 $4a^2 + \frac{1}{9} - \frac{4}{3}a$

436 $125x^3 - y^6$

437 $\frac{1}{4} + x + x^2$

438 $y^2 - 11y + 30$

439 $\frac{1}{27} + b^2 + b^3 + \frac{1}{3}b$

440 $b^9 - 1$

441 $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2$

442 $9x^2y - 24xy + 16y$

443 $2mt^2 - 4mt - 30m$

444 $6 - 18c^2 + 18c^4 - 6c^6$

445 $3a^2c^3 - 24a^2$

446 $t^3 - 13t - 12$

447 $2x^3 - 12x^2 + 24x - 16$

448 $x^6 - x^2$

449 $x^2 - 13x + 22$

450 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

451 $x - 1 + 2x^2$

452 $1 - (a + b)^2$

453 $8x^5y^2 + 6x^3y^2 - 12x^4y^2 - x^2y^2$

454 $-7x^2y^2 + 14x^5y^6$

455 $\frac{x^4}{4} + x^2 + 1$

456 $a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4ac + 4bc$

457 $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

458 $\frac{4}{9} + y^2 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{4}{3}y + 2x - 3xy$

459 $\frac{9}{16}a^2b^2 + \frac{16}{9} + 2ab$

460 $3ax + 3xy + 2a + 2y$

461 $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

462 $(2x - y)^2 - \frac{1}{25}$

463 $\frac{1}{27}a^3b^3 - \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{9}{4}ab - \frac{27}{8}$

464 $4x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 + 2xy - 4xz - yz$

465 $y^3z^{12} - a^9$

466 $3b^2 + b - 10$

467 $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ $[(x - 1)(x^2 - x + 3)]$

468 $32x - 12x^2 - 16$ $[-4(x - 2)(3x - 2)]$

---

469 $3x^5 - 81x^2$ $[3x^2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)]$

470 $\frac{1}{4}x^2y^2z^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{1}{4}xyz^2 - \frac{2}{3}$ $\left[\left(\frac{1}{4}xyz^2 + \frac{2}{3}\right)(xy - 1)\right]$

471 $a^4 - \frac{1}{625}$ $\left[\left(a - \frac{1}{5}\right)\left(a + \frac{1}{5}\right)\left(a^2 + \frac{1}{25}\right)\right]$

472 $a^2x^2 - 2b + abx - 2ax$ $[(ax + b)(ax - 2)]$

473 $a^2 - 21 - 4a$ $[(a-7)(a+3)]$

474 $27t^4 - 54t^3 - 8t + 36t^2$ $[t(3t-2)^3]$

475 $2x^3 + 2x^2 - 4x$ $[2x(x-1)(x+2)]$

476 $6x^2 + 13x - 5$ $[(3x-1)(2x+5)]$

477 $3x - 7x^2 + 2x^3$ $[x(x-3)(2x-1)]$

478 $4x^2 + y^2 - 4xy - 4$ $[(2x-y+2)(2x-y-2)]$

479 $y^2 - 2x^2 + 2 - x^2y^2$ $[(1+x)(1-x)(y^2+2)]$

480 $4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x$ $[x(2x^2-1)(2x-1)]$

481 $a^3b^3 + a^3b - ab^3 - ab$ $[ab(a-1)(a+1)(b^2+1)]$

---

482 $y - 2 - x^2y + 2x^2$ $[(x+1)(1-x)(y-2)]$

483 $12x^4y + 16x^2y^3 - 2x^5 - 24x^3y^2$ $[2x^2(2y-x)^3]$

484 $(a+1)(a^2+1) - (a+1)(a^2-1)$ $[2(a+1)]$

485 $9x^2 - (x-5)^2$ $[(2x+5)(4x-5)]$

486 $x^6 - x^4 + x^2 - 1$ $[(x+1)(x-1)(x^4+1)]$

487 $(a+b)3x^2 - (a-b)3x^2$ $[6bx^2]$

488 $3ax - 3bx - 6ay + 6by$ $[3(x-2y)(a-b)]$

489 $12(a+b) - 6(a^2-b^2)$ $[6(a+b)(2-a+b)]$

490 $x^3 + 4x^2 - 9x - 36$ $[(x+4)(x-3)(x+3)]$

491 $(a+2)^2 - 1$ $[(a+1)(a+3)]$

492 $3x^4 - 12ax^2 + 12a^2$ $[3(x^2-2a)^2]$

493 $-49a^3 - 14a^2b - ab^2$ $[-a(7a+b)^2]$

494 $-2xb^2 - 4xb - 2x$ $[-2x(b+1)^2]$

495 $x^5 - 10x^4 + 25x^3$ $[x^3(x-5)^2]$

496 $a^9 - 3a^6 + 3a^3 - 1$ $[(a-1)^3(a^2+a+1)^3]$

497 $16a^2b - \frac{1}{9}b$ $\left[b\left(4a-\frac{1}{3}\right)\left(4a+\frac{1}{3}\right)\right]$

498 $a^4(x^2+1) - 2a^4$ $[a^4(x+1)(x-1)]$

499 $x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$ $[(x+2)^3(x-2)^3]$

500 $x^3 + x^2y - x - y$ $[(x-1)(x+1)(x+y)]$

501 $7x^4 - 7$ $[7(x-1)(x+1)(x^2+1)]$

5 MCD e mcm di polinomi

▶ Teoria a p. 10

502 **ESERCIZIO GUIDA** Calcoliamo MCD e mcm dei polinomi: $x^3 + 2x^2 - 8x$; $x^3 + 4x^2$; $2x^2 + 16x + 32$.

Scomponiamo in fattori i polinomi.

$$x^3 + 2x^2 - 8x = x(x^2 + 2x - 8) = x(x-2)(x+4)$$

$$x^3 + 4x^2 = x^2(x+4)$$

$$2x^2 + 16x + 32 = 2(x^2 + 8x + 16) = 2(x+4)^2$$

$\text{MCD} = (x+4)$ fattori comuni con esponente più basso

$\text{mcm} = 2x^2(x-2)(x+4)^2$ fattori comuni e non comuni con esponente più alto

ESERCIZI

Calcola MCD e mcm dei seguenti polinomi.

503 $15a^3 + 3a^2; \quad 6a^2 - 18a; \quad 18a^2b + 18a^2.$ [MCD $= 3a$; mcm $= 18a^2(5a+1)(a-3)(b+$

504 $m^3 - 25m; \quad 2m^3 - 10m^2; \quad m^3 - 6m^2 + 5m.$ [MCD $= m(m-5)$; mcm $= 2m^2(m-5)(m+5)(m-$

505 $12x^2 - 12x + 3; \quad 12xy - 12x - 6y + 6; \quad 6xy^2 - 3y^2.$ [MCD $= 3(2x-1)$; mcm $= 6y^2(2x-1)^2(y-$

506 $a^2b - 2ab^2; \quad 6a^2b^2 + 12ab^3; \quad -3a^3b^2 - 6a^2b^3.$ [MCD $= ab(a+2b)$; mcm $= 6a^2b^2(a+2$

507 $16x^3 - 8x^2 + x; \quad 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2; \quad 8x^3 - 10x^2 + 2x.$ [MCD $= 1$; mcm $= 2x(4x-1)^2(x-$

508 $x^2 - 9; \quad x^4 - x^3 - 6x^2; \quad x^3 + x^2 - 8x - 12.$ [MCD $= (x-3)$; mcm $= (x-3)(x+3)(x+2)^2$

509 $2x^3 + 2x^2 - 4x; \quad 4x^4 - 4x^3; \quad 4x^3 - 4x.$ [MCD $= 2x(x-1)$; mcm $= 4x^3(x-1)(x+1)(x+$

510 $a^3 + 2a^2 - a - 2; \quad a^3 + 2a^2 - 9a - 18; \quad a^3 - 4a.$
[MCD $= (a+2)$; mcm $= a(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)(a+3)(a-3$

511 $a^2 - b^2; \quad a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2; \quad 3a^2 - a - 3ab + b.$ [MCD $= (a-b)$; mcm $= (a-b)^3(a+b)(3a-$

512 $3x^2 - 3x - 18; \quad 4x^5 - 16x^3.$ [MCD $= (x+2)$; mcm $= 12x^3(x-3)(x+2$

513 $a^2 - ab - 2a + 2b; \quad b^2 - 2b - ab + 2a; \quad 4 - 2a + ab - 2b.$ [MCD $= 1$; mcm $= (a-b)(a-2)(b-2$

514 $(x^2-4)(x^2+9); \quad (x^3+9x)(x^2+4x+4); \quad x^3 - 4x.$ [MCD $= (x+2)$; mcm $= x(x+2)^2(x^2+9)(x-2$

515 $2x^3 - 50x; \quad x^4 - 125x; \quad x^4 - 2x^3 - 15x^2.$
[MCD $= x(x-5)$; mcm $= 2x^2(x-5)(x+5)(x+3)(x^2+5x+25$

---

516 VERO O FALSO?

a. Il mcm di polinomi non può essere 1. V F

b. $x - 2$ è un divisore di $x^2 - 2x - 6$. V F

c. I due polinomi $\frac{1}{3}(x+1)$ e $\frac{2}{5}(a+b)$ non hanno un divisore comune. V F

d. Il mcm di $3a + 9$ e $3a + 6$ è $3a + 9$. V F

517 TEST Il MCD tra due polinomi è $x(x-1)$ e loro mcm è $x^2(x-1)^2(x+1)$. I due polinomi sono:

A $x^2 - x, \quad x^2 - 2x + 1.$

B $x^2 + x, \quad x^4 - 2x^3 + x^2.$

C $x^4 - x^2, \quad x^3 - 2x^2 + x.$

D $x^4 + x^2, \quad x^2 + 2x + 1.$

E $x^2 + x, \quad x^3 - x.$

FAI UN ESEMPIO

518 di due polinomi che hanno $x^2 + 2x - 3$ come MCD.

519 di due polinomi che hanno $5x^4y - 5x^2y^3$ come mcm.

520 EUREKA! **Segui gli indizi!** Del polinomio $B(x)$ si sa che: il mcm tra $B(x)$ e il polinomio $x^2 - x - 2$ $x^3 - 2x^2 - x + 2$; il MCD tra $B(x)$ e il polinomio $x^2 - x - 2$ è $x - 1$; il coefficiente del termine di grado massimo di $B(x)$è 1. Determina $B(x)$.

VERIFICA DELLE COMPETENZE ALLENAMENTO

UTILIZZARE TECNICHE E PROCEDURE DI CALCOLO

Esegui le seguenti divisioni.

1 $\left(4a^3b^3+\frac{1}{2}a^2b+2ab^2\right):(2ab)$

2 $(6x^3y^2-12x^2y^3+12xy):\left(-\frac{3}{2}xy\right)$

3 $(x^2-x+3-2x^3):(x-1)$ $[Q=-2x^2-x-2;\ R=1]$

4 $(b^4-3b^2+2):(b-2)$ $[Q=b^3+2b^2+b+2;\ R=6]$

5 $(6x^3-9x^2+3x-4):(2x-5)$ $[Q=3x^2+3x+9;\ R=41]$

6 $(3t^5+2t^4+3t+5):(3t+2)$ $[Q=t^4+1;\ R=3]$

7 $\left(5x^3-\frac{1}{2}x^2+3\right):(x^2+1)$ $\left[Q=5x-\frac{1}{2};\ R=-5x+\frac{7}{2}\right]$

8 $(5x^5-2x^3+6x-1):(x^2-2x)$ $[Q=5x^3+10x^2+18x+36;\ R=-78x+1]$

9 $(x^3-5x^2+4x-1):(x-2)$ $[Q=x^2-3x-2;\ R=-5]$

10 $(3x^3+8x^2+3x-2):(3x-1)$ $[Q=x^2+3x+2;\ R=0]$

11 $(-8x^2+x-3x^3-6+x^4):(6+3x)$ $\left[Q=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1;\ R=0\right]$

12 $(t^3-2t^2-t+6):(t-4)$ $[Q=t^2+2t+7;\ R=34]$

13 $\left(2y^5-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{8}y-\frac{7}{3}\right):\left(y^3+\frac{1}{4}y\right)$ $\left[Q=2y^2-\frac{1}{2};\ R=-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y-\frac{7}{3}\right]$

14 $\left(m^4+6m^3+\frac{2}{3}m^2+4m-1\right):\left(2m^2+\frac{4}{3}\right)$ $\left[Q=\frac{1}{2}m^2+3m;\ R=-1\right]$

15 $\left(4a^3-\frac{7}{3}a^2+\frac{1}{3}-a\right):\left(a-\frac{1}{2}\right)$ $\left[Q=4a^2-\frac{1}{3}a-\frac{7}{6};\ R=-\frac{1}{4}\right]$

16 $\left(2x^4-x^3-\frac{3}{2}x\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$ $[Q=2x^3+4x^2+5x+6;\ R=2x-10]$

17 $(2x^5-5x-x^3-4):(x^2-2x+1)$ $[Q=2x^3+4x^2+5x+6;\ R=2x-10]$

18 $\left(\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3+3x-2\right):(2x^2-1)$ $\left[Q=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6};\ R=\frac{11}{4}x-\frac{11}{6}\right]$

19 $(x^2-2xy-15y^2):(x+3y)$ rispetto alla variabile x. $[Q=x-5y;\ R=0]$

20 $(6x^4+2x^3y-9x^2y^2-5xy^3-4y^4):(2x^2+2xy+y^2)$ rispetto alla variabile x. $[Q=3x^2-2xy-4y^2;\ R=5xy^3]$

21 $(x^4t-2x^3t^2+5xt^4-x^2):(t-2x)$ rispetto alla variabile t. $[Q=5xt^3+10x^2t^2+18x^3t+37x^4;\ R=74x^5-x^2]$

22 $(a^4+5a^3b-3a^2b^2-13ab^3+4b^4):(a+5b)$ rispetto alla variabile a. $[Q=a^3-3ab^2+2b^3;\ R=-6b^4]$

VERIFICA DELLE COMPETENZE

COMPLETA eseguendo, se necessario, una divisione.

23 $x^4 - 81 = (x+3) \cdot \boxed{}$

24 $x^5 + x^3 + x^2 + 7 = \boxed{} \cdot (x^3+1) + \boxed{}$

25 $2x^3 - x + 2 = \boxed{} \cdot (x-1) + \boxed{}$

26 $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-2) \cdot \boxed{}$.

Determina il resto senza eseguire la divisione.

27 $(2x^3 + 4x^2 + 3x - 1) : (x+2)$

28 $\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 4x - 1\right) : (x+1)$

29 $\left(x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x + 1\right) : \left(x - \frac{2}{3}\right)$

30 $(a^4 - 4a^3 - 2a^2 + 3a) : (a-2)$

31 Stabilisci se $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 6$ è divisibile per
$x-2$, $\quad 2x-1$, $\quad (x-1)(x+1)$.

32 Determina il valore di k per cui la divisione di $-8x^4 - 2x^3 + x + 2k - 6$ per $x+1$ ha resto 5.

33 Trova il valore di k per cui $16x^3 - 6x^2 - x + k$ è divisibile per $x - \frac{1}{2}$.

TEST

34 Il polinomio $P(x) = 2x^3 - \frac{13}{2}x + k$ è divisibile per $(x+2)$ se k è uguale a:

A $+1$. B -2. C 0. D -3. E $+3$.

35 È data la divisione: $(2a^3 + 3a^2 - 2a - 3) : (ka + 3)$. Per quale valore di k il quoziente è $a^2 - 1$?

A 1 B 2 C 3 D -2 E -3

36 Il quoziente della divisione fra due polinomi è il polinomio nullo. Come possono essere i due polinomi

37 In quale caso il resto di una divisione fra due polinomi è uguale a 0?

38 Spiega perché è sbagliato eseguire la divisione indicata nel seguente modo:

$$(9x^3) : (3x^2 + 9) = (9x^3) : (3x^2) + (9x^3) : 9 = 3x + x^3.$$

Calcola il risultato nel modo corretto.

TEST

39 Se -2 e $+1$ sono zeri del polinomio $P(x)$, allora nella scomposizione di $P(x)$ si hanno i fattori:

A $x-2$ e $x+1$.
B $x+2$ e $x-1$.
C $x-2$ e $x-1$.
D $x+2$ e $x+1$.
E $2-x$ e $1-x$.

40 Usando il raccoglimento parziale, è possibile scomporre il polinomio $2x + 6y - 5ax - 15ay$ in uno sol seguenti modi. Quale?

A $(x+3y)(2+5a)$
B $(x+3y)(2-5a)$
C $(x-3y)(2+5a)$
D $(x-3y)(2-5a)$
E $(x+3y)(5a-2)$

Scomponi in fattori.

41 $2a^5x^4 - 32a$; $x^3 + x^2 - 17x + 15$; $x^3 - 4xy^2 + 3x^2 - 12y^2$.
$[2a(ax-2)(ax+2)(a^2x^2+4); (x-1)(x-3)(x+5); (x+3)(x-2y)(x+2y)]$

42 $2x^2y + 16xy + 32y$; $2x + 6y + ax + 3ay$.
$[2y(x+4)^2; (2+a)(x+3y)]$

43 $8ax^2 + 2ay^2 + 8axy$; $3a^2b^4 - 12$; $2ax - 4ay + bx - 2by$.
$[2a(2x+y)^2; 3(ab^2-2)(ab^2+2); (2a+b)(x-2y)]$

44 $2a^2b - 4ab + 8ab^2$; $3ax + 6bx + 2ay + 4by$.
$[2ab(a-2+4b); (a+2b)(3x+2y)]$

45 $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$; $2x^4 - 20x^2 - 2x^3 + 20x$; $5a^3 + 10a^2 - 25a + 10$.
$[(x-2)(x+2)(x+3); 2x(x-1)(x^2-10); 5(a-1)(a^2+3a-2)]$

46 $\frac{1}{3}x^4y^2 - \frac{1}{27}$; $x^6y^6 - \frac{1}{16}x^2y^2$; $a^3 + 2a^2 - 9a - 18$.
$\left[\frac{1}{3}\left(x^2y-\frac{1}{3}\right)\left(x^2y+\frac{1}{3}\right); x^2y^2\left(x^2y^2+\frac{1}{4}\right)\left(xy-\frac{1}{2}\right)\left(xy+\frac{1}{2}\right); (a-3)(a+3)(a+2)\right]$

47 $2x^4 + 54x$; $a^3 + 6a^2 - 7a$; $4a^3 + ax^2 + 4a^2x$.
$[2x(x+3)(x^2-3x+9); a(a-1)(a+7); a(2a+x)^2]$

48 $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$
$[(x-2)(x^2-3)]$

49 $a^3 + 2a^2 + 2a + 1$
$[(a+1)(a^2+a+1)]$

50 $x^{10} - 6x^7 + 9x^4$
$[x^4(x^3-3)^2]$

---

51 $x^2 + 2a^2x + a^4$; $y^2 + 8ty + 16t^2$.

52 $9x^2 - 6xy^3 + y^6$; $\frac{1}{16}x^2y^6 + \frac{1}{6}xy^3 + \frac{1}{9}$.

53 $-4t^8 + 81$; $16x^4 - y^4$.

54 $x^4 + 4x^2y - 2x^2z^3 - 4yz^3 + 4y^2 + z^6$

55 $a^{12} + 1$; $\frac{1}{8} - x^6$.

56 $a^4 - 3a^3 + 3a^2 - a$

57 $4a^2 + 16b^2 + 36c^2 - 16ab + 24ac - 48bc$

58 $25a^6 - b^{12}$

59 $9a^2b^2c^2 - 6abc^2 + c^2$

60 $x^4 - 17x^2 + 16$

61 $3t^5 + 6t^4 - 15t^3 - 18t^2$

62 $2x^3 - 5x^2 - 12x$

63 $m^4 + 4m^3 - 5m^2$

64 $18y^2 - 12xy^2 + 2x^2y^2$

65 $c + 6bc + 12b^2c + 8b^3c$

66 $\frac{a^2}{5} + \frac{3}{5}a - \frac{18}{5}$

67 $(b-7)(a^2+4) + (b-7)(4-a^2)$

---

68 $x^3 + 4x^2 - 5$
$[(x-1)(x^2+5x+5)]$

69 $a^6 - a^2 - 3a^4 + 3$
$[(a^2-3)(a-1)(a+1)(a^2+1)]$

70 $a^4 + 4a^3y + 4a^2y^2$
$[a^2(a+2y)^2]$

71 $x^9 - x - 3x^8 + 3$
$[(x-3)(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)]$

72 $y^4 - 2y^3 + y - 2$ $[(y+1)(y-2)(y^2-y+$

73 $x^6 - 64$ $[(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+$

74 $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ $[(x-1)(x-3)(x+2)(x+$

75 $4a^6b + 6a^5b + 8a^3b^3 + 12a^2b^3$ $[2a^2b(a^3+2b^2)(2a+$

76 $x^3y^{18}z^5 - z^8$ $[z^5(xy^6-z)(x^2y^{12}+xy^6z+z$

77 $a^3 - 4a^2 - 3a + 18$ $[(a+2)(a-3$

78 $x^7 - 3x^6 + x^5 + 4x^3$ $[x^3(x-2)^2(x^2+x+1$

79 $3x^3 - 12x + 6x^2y - 24y$ $[3(x-2)(x+2)(x+2$

80 $x^8 - x^2$ $[x^2(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1$

81 $4x^7y - 12x^4y + 9yx$ $[xy(2x^3-3$

82 $x^3y^2 - 8y^5$ $[y^2(x-2y)(x^2+2xy+4$

83 $a^3 - 39a + 70$ $[(a-5)(a-2)(a+7$

84 $\frac{7}{27}ab^4 - 7a^4b$ $\left[7ab\left(\frac{1}{3}b-a\right)\left(\frac{1}{9}b^2+\frac{1}{3}ab+a\right.$

85 $(2-x)^2 - 9$ $[(x+1)(x-5$

86 $(2x+1)^2 - 4(4x^2-1)$ $[(2x+1)(5-6$

87 $36x^4 + y^2 - 9x^2 - 4x^2y^2$ $[(2x+1)(2x-1)(3x+y)(3x-$

88 $xy^2 + \frac{16}{81}xy^6 - \frac{8}{9}xy^4$ $\left[xy^2\left(\frac{2}{3}y+1\right)^2\left(\frac{2}{3}y-1\right.$

89 $(3a-b)^2 - (a+b)(3a-b) - 9a^2 + b^2$ $[-(3a-b)(a+3$

90 $x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 7x + 10$ $[(x^2+1)(x-5)(x-$

91 $b^2 - 2b + 1 - (a+b)^2$ $[-(a+1)(a+2b-$

Calcola MCD e mcm dei seguenti polinomi.

92 $a^2 + 3a - 10;\quad a^2 + 10a + 25;\quad 2a^2 + 10a.$ $[\text{MCD} = a+5;\ \text{mcm} = 2a(a+5)^2(a-$

93 $4x^2 - 1;\quad 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1;\quad 12x + 6.$ $[\text{MCD} = 2x+1;\ \text{mcm} = 6(2x+1)^3(2x-$

94 $b^2 - 7b + 6;\quad ab - 2b + 4a - 8;\quad b^3 + 2b^2 - 7b + 4.$ $[\text{MCD} = 1;\ \text{mcm} = (b-6)(b-1)^2(b+4)(a-$

95 $x^3 - 3x - 2;\quad x^3 + x^2 - 9x - 9;\quad x^2 - x - 2.$ $[\text{MCD} = x+1;\ \text{mcm} = (x+1)^2(x+3)(x-3)(x-$

96 $6 - x - x^2;\quad x^3 - 7x + 6;\quad x^2 - 3x + 2.$ $[\text{MCD} = 2-x;\ \text{mcm} = (x+3)(1-x)(2-$

97 $(x-y)(x^2-4y^2);\quad x^2 - 3xy + 2y^2;\quad x^2 + xy - 2y^2.$ $[\text{MCD} = x-y;\ \text{mcm} = (x-y)(x-2y)(x+2$

RISOLVERE PROBLEMI

Divisione fra polinomi

98 Scrivi il polinomio $P(x)$ che diviso per $x^2 - x + 2$ dà come quoziente $x^2 - 2x + 2$ e come resto $-6x + 4$. Dimostra poi che $P(x)$ è divisibile per $x^2 + 4$.
$[P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8]$

99 Considera i polinomi

$$A(x) = 3x^4 - 4x^3 + \frac{5}{16}x^2 + x - \frac{5}{4}$$

e

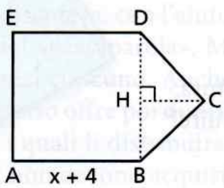
$$B(x) = -x^3 + (a-2)x - 3 + a.$$

Trova per quale valore di a, se divisi per $(x + 2)$, hanno lo stesso resto. Esegui poi le due divisioni per verificare che i resti coincidano.

100 L'area di un triangolo ABC è $3a^3 + 7a^2 + 3a + 2$, con $a > 0$, e il lato AB misura $a + 2$.
Trova l'altezza CH relativa ad AB.
$[6a^2 + 2a + 2]$

101 Un rettangolo ha la base che misura $2a + 1$ e l'area che misura $2a^3 + 5a^2 - 4a - 3$, con $a > 0$. Trova il perimetro di un triangolo in cui due lati hanno le stesse misure dei lati del rettangolo e il terzo lato è 8.
$[a^2 + 4a + 6]$

102 La figura, di area $2x^2 + 13x + 20$, è formata da un quadrato di lato $x + 4$ e da un triangolo.
Trova l'altezza CH del triangolo.
$[2x + 2]$

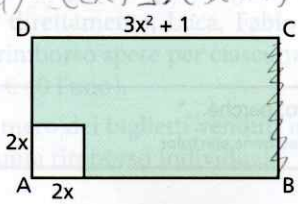


103 L'area della zona colorata misura

$$3x^3 + 8x^2 + x + 4.$$

Utilizza i dati della figura per determinare la misura di CB.

$3x^3+8x^2+x+4) - [(2x)^2] : (3x^2+1)$



$A = b \cdot h$

$h = \frac{A}{b}$

$b = \frac{A}{h}$

Scomposizione di polinomi

104 La misura dell'area di un triangolo è

$$2a^2 + \frac{13}{2}ab + \frac{3}{2}b^2, \qquad \text{con } a, b > 0,$$

e le misure della base e dell'altezza sono rappresentate da due binomi a coefficienti interi. Trova:

a. la base e l'altezza del triangolo;

b. l'area di un quadrato che ha perimetro uguale al doppio della somma di base e altezza del triangolo.

$\left[\text{a) } a + 3b, 4a + b; \text{ b) } \frac{25}{4}a^2 + 4b^2 + 10ab\right]$

105 Le misure della base e dell'altezza di un rettangolo sono rappresentate da due polinomi a coefficienti interi. La misura dell'area del rettangolo vale $3a^2 + 14ab + 8b^2$, con $a, b > 0$.

a. Quanto misurano base e altezza?

b. Quanto misura il perimetro del rettangolo?

$[\text{a) } (3a + 2b), (a + 4b); \text{ b) } 4(2a + 3b)]$

106 Determina per quale valore di $a \in \mathbb{Z}$ il polinomio $x^3 + ax - 2$ può essere scomposto in $(x + 1)^2(x - 2)$. Motiva la risposta. $[a = -3]$

107 **Trova *a*** Se $x + 2$ e $x - 3$ sono fattori del polinomio $p(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$, trova a.
(USA *Texas A&M University Math Contest – AB Exam*, 2012)
$[-12]$

108 Andrea: «Io riesco a scomporre anche $x^4 + 4y^4$!».
Cristina: «Non mi sembra possibile...».
Andrea: «Aggiungi e togli $4x^2y^2$». Cosa pensi del metodo di Andrea?

109 EUREKA! **Trova e moltiplica** Qual è il prodotto degli zeri del polinomio $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$?
(*Furman University – Ciphering Competition*, 2008)
$[20]$

110 **Senza scomporre** È possibile che il MCD dei polinomi

$$A(x) = x^2 - 4x + 4,$$
$$B(x) = x^4 - 16,$$
$$C(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 2$$

sia $x - 2$? Motiva la risposta senza scomporre i polinomi in fattori.
$[\text{no}]$

VERIFICA DELLE COMPETENZE

RISOLVIAMO UN PROBLEMA

$A(x)$, $B(x)$ e $A(x)-B(x)$

Dimostra che, se due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, entrambi di grado maggiore o uguale a 1, danno lo stesso resto R se divisi per il binomio $x-1$, allora il polinomio $A(x)-B(x)$ è divisibile per $x-1$.

▶ **Utilizziamo la relazione fra dividendo, divisore, quoziente e resto.**

Chiamiamo $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ i quozienti delle due divisioni. Sono vere le uguaglianze:

$$A(x) = Q_1(x)\cdot(x-1)+R;\ B(x) = Q_2(x)\cdot(x-1)+R.$$

▶ **Calcoliamo la differenza.**

Dalle uguaglianze precedenti ricaviamo: $A(x)-B(x) = Q_1(x)\cdot(x-1)\cancel{+R}-Q_2(x)\cdot(x-1)\cancel{-R}$.

▶ **Raccogliamo il fattore comune.**

$$A(x)-B(x) = [Q_1(x)-Q_2(x)]\cdot(x-1)$$

▶ **Concludiamo.**

$A(x)-B(x)$ si può scomporre in due fattori di cui uno è $x-1$, quindi il polinomio è divisibile per $x-1$.

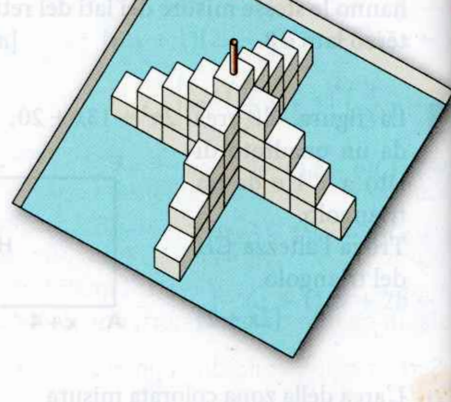
111 Trova il più piccolo valore $m \in \mathbb{Q}$ per cui $x^{2m+1}-9$ è scomponibile nella differenza di quadrati. Dimostra c per tale valore il binomio dato può essere scritto nella forma $(-x-3)(3-x)$. Esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che binomio dato sia la differenza di quadrati? Motiva la risposta.

$\left[m = \frac{1}{2}\right.$; non esist

112 REALTÀ E MODELLI **La fontana** Un architetto ha progettato una fontana un cui bozzetto preparatorio è riportato a lato. La struttura centrale è costituita da cubi di marmo sovrapposti: si passa dal livello inferiore a quello immediatamente superiore togliendo un cubo da ciascuna delle quattro ali. L'architetto utilizza la seguente formula per calcolare la quantità di cubi di marmo necessaria:

numero totale di cubi $= 2n^2 - n$,

dove n indica il numero (naturale) dei livelli della struttura. Se ha a disposizione 66 cubi, quanti livelli riesce a costruire?



113 **La sfida** Aldo e Giovanni amano i giochi matematici e spesso si sfidano. Aldo sostiene che, presi due nume dispari p e q maggiori di 1, il prodotto di p diminuito di 1 con il quadrato di q diminuito di 1 è divisibile pe 8, e il quoziente è un numero pari. Giovanni prova con qualche numero ed effettivamente verifica che è ver però pensa che sia un caso fortuito. Dimostra questa proprietà.

VERIFICA DELLE COMPETENZE PROVE

1 ora

PROVA A

1 **VERO O FALSO?**

a. Il resto di $(5x^2 - 4x + 3) : (x + 1)$ è 4. V F

b. $2x^2 + 13x + 6$ è divisibile per $(x + 6)$. V F

c. Il polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x + c)$ se $P(c) = 0$. V F

d. $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ è divisibile sia per $(x + 2)$, sia per $(x - 3)$. V F

2 Esegui le seguenti divisioni applicando, quando è possibile, la regola di Ruffini:

a. $(10x^3 - 2x^2 - 4x + 2) : (2x^2 - 1)$;

b. $(4x^4 - 3x^2 + 2x - 1) : (x - 3)$;

c. $\left(9a^5 - \frac{1}{9}a\right) : (3a + 2)$.

3 Un rettangolo di area $3x^4 + 12x^3 + 8x^2 + 20x + 5$ ha base $3x^2 + 5$. Determina l'altezza.

4 Scomponi in fattori.

a. $a^6c + 4a^3c + 4c$

b. $a^5 - 3a^4b + 3a^3b^2 - a^2b^3$

c. $3ak^3 - 24a$

d. $m^5 + 5m^4 - 4m - 20$

5 Scomponi in fattori.

a. $9a^2y - y^5$

b. $t^2 - 3t - 18$

c. $k^3 - 2k^2 - 5k + 6$

d. $\frac{1}{4} + y + y^2$

6 Calcola MCD e mcm di $18x + 3x^2$, $x^3 - 36x$, $x^3 + 4x^2 - 12x$.

PROVA B

a festa Mario, titolare di una discoteca, con l'aiuto dei suoi collaboratori Luca, Fabio e Paola organizza una festa i Capodanno con il metodo del «passaparola». Mario contatta n persone; ognuno di queste contatta n amici, i uali a loro volta invitano n amici ciascuno. Anche Luca, Fabio e Paola contattano ciascuno n persone, ognuna elle quali invita altri n amici. Mario offre poi due biglietti omaggio ai suoi collaboratori e a ciascuna delle persone ontattate da lui direttamente, i quali li distribuiranno come meglio credono (ovviamente Mario, Luca, Fabio e aola, in quanto organizzatori, non devono acquistare il biglietto).

. Scrivi l'espressione che rappresenta il numero dei biglietti d'ingresso che venderà Mario.

. Oltre ai biglietti così venduti, all'ultimo momento acquistano il biglietto altre 14 persone: scrivi l'espressione che rappresenta il nuovo numero di biglietti venduti.

. Come rimborso spese forfettario, un quarto del ricavo dei biglietti venduti verrà diviso in parti uguali tra Mario, le n persone da lui chiamate direttamente, Luca, Fabio e Paola. Calcola a quanto ammonta il rimborso spese per ciascuna persona (i biglietti vengono venduti a € 40 l'uno).

. Calcola il numero dei biglietti venduti nell'ipotesi $n = 7$ e la corrispondente quota rimborso individuale.