

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO - ESEMPI

5.3 Disequazioni di 1° grado ad una incognita o ad esse riconducibili

Si dice **grado** di una disequazione intera il massimo esponente con cui compare l'incognita.

Una disequazione di 1° grado può sempre essere ridotta alla forma normale

$$ax + b \geq 0$$

Pertanto, se è

$$ax + b > 0$$

trasportando il termine noto a destra otteniamo la disequazione equivalente

$$ax > -b$$

Applicando ora il secondo principio di equivalenza, dividendo per a , avremo

$$x > -\frac{b}{a} \quad \text{se } a > 0$$

$$x < -\frac{b}{a} \quad \text{se } a < 0$$

Se è

$$ax + b < 0$$

procediamo in modo analogo.

Esempi:

1) Risolvere la disequazione

$$\frac{3x+1}{2} - \frac{2x+3}{3} > \frac{2+x}{4}$$

Moltiplicando i due membri per il m.c.d. = 12, otteniamo:

$$18x + 6 - 8x - 12 > 6 + 3x$$

Trasportando tutti i termini al primo membro e riducendo quelli simili otteniamo la disequazione ridotta a forma normale

$$7x - 12 > 0$$

da cui

$$x > \frac{-12}{7}$$

Concludiamo quindi che la disequazione è verificata per ogni valore di x maggiore di $\frac{12}{7}$. La rappresentazione grafica dell'intervallo delle soluzioni è riportata in fig. 5.2.

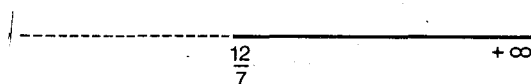


Figura 5.2 Il tratto continuo di retta è l'immagine dell'intervallo numerico $x > \frac{12}{7}$ cioè delle soluzioni della disequazione proposta.

2) Risolvere la disequazione

$$(x + 1)^2 - 7x \geq (x + 1)(x - 1)$$

Eseguendo le operazioni indicate otteniamo

$$x^2 + 2x + 1 - 7x \geq x^2 - 1$$

e riducendo a forma normale

$$-5x + 2 \geq 0$$

da cui

$$-5x \geq -2 \quad \text{e quindi} \quad x \leq \frac{2}{5}$$

La rappresentazione grafica delle soluzioni è riportata in fig. 5.3.

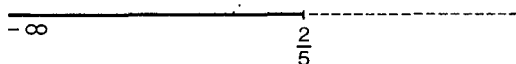


Figura 5.3 Il tratto continuo di retta è l'immagine dell'intervallo numerico $x \leq \frac{2}{5}$, cioè delle soluzioni della disequazione proposta, insieme a cui appartiene anche $\frac{2}{5}$

3) Risolvere la disequazione

$$x\sqrt{3} - 6 < x + \sqrt{3}$$

Riducendo a forma normale otteniamo

$$x(\sqrt{3} - 1) - 6 - \sqrt{3} < 0$$

e quindi

$$x < \frac{6 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \quad \text{o anche} \quad x < \frac{7\sqrt{3} + 9}{2}$$

La rappresentazione grafica dell'insieme delle soluzioni è riportata in fig. 5.4.

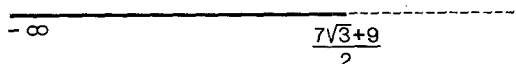


Figura 5.4 Immagine grafica delle soluzioni della disequazione proposta.

4) Risolvere la disequazione:

$$|2x - 3| > 5$$

L'espressione $2x - 3$ è in valore assoluto maggiore di 5 in due casi; e precisamente, quando è maggiore di 5 oppure minore di -5 . Le soluzioni della disequazione data sono dunque i valori della x che soddisfano o all'una o all'altra delle due condizioni:

$$2x - 3 > 5$$

$$2x - 3 < -5$$

Quindi:

$$x > 4 \quad \text{e} \quad x < -1$$

Nella figura 5.5 sono graficamente rappresentate le soluzioni trovate.

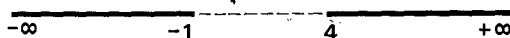


Figura 5.5 Rappresentazione grafica delle soluzioni della disequazione $|2x - 3| > 5$.

Sia ora da risolvere la seguente disequazione

$$\frac{2x - 5}{8 - x} > 0$$

Si tratta evidentemente di una disequazione fratta e risolverla significa vedere per quali valori della variabile x il numeratore ed il denominatore della frazione assumono valori concordi, cioè sono o entrambi positivi o entrambi negativi.

Per rendere più rapida e facile la risoluzione di una disequazione fratta si può ricorrere ad un metodo grafico, e precisamente si può procedere così: si esaminano separatamente il numeratore ed il denominatore della frazione e si riportano su due rette parallele, sulle quali è fissato uno stesso sistema di ascisse, gli intervalli in cui sono positivi il numeratore ed il denominatore rispettivamente; dall'esame globale del grafico così ottenuto sarà facile stabilire in quali intervalli i detti termini sono di segno concorde e in quali di segno discorde. Naturalmente dai valori che la variabile può assumere vanno eliminati quelli che annullano il denominatore, come nelle equazioni.

Nel nostro caso particolare, dopo aver posto $x \neq 8$, procederemo così:

$$2x - 5 > 0 \quad \text{per } x > \frac{5}{2}$$

$$8 - x > 0 \quad \text{per } x < 8$$

Rappresentiamo ora graficamente, con tratto continuo e su due rette parallele, gli intervalli di positività del numeratore e del denominatore rispettivamente (fig. 5.6); le parti di rette tratteggiate corrisponderanno invece ad intervalli in cui i detti termini sono negativi.

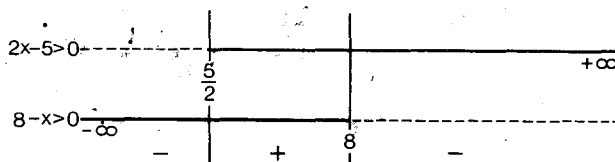


Figura 5.6 Il tratto continuo di ogni retta rappresenta l'intervallo in cui un termine della frazione è positivo; il tratto tratteggiato l'intervallo in cui lo stesso termine è negativo. Dalla regola dei segni relativa al quoziente di due numeri relativi si deduce che la frazione è positiva per $\frac{5}{2} < x < 8$, mentre è negativa per $x < \frac{5}{2}$ e per $x > 8$.

Appare chiaramente dal grafico che l'unico intervallo in cui i due termini hanno segno concorde, e nel quale perciò la disequazione è soddisfatta, è quello compreso tra $\frac{5}{2}$ e 8; diremo quindi che l'insieme delle soluzioni della disequazione è l'insieme di tutti i valori di x soddisfacenti alla condizione

$$\frac{5}{2} < x < 8$$

Questo significa che ogni numero reale interno al detto intervallo, sostituito alla variabile x , verifica la disequazione proposta, mentre ogni numero esterno ad esso non la verifica; infatti, ogni valore di x minore di $\frac{5}{2}$ rende negativo il numeratore ma positivo il denominatore e quindi negativa la frazione; analogamente, ogni valore di x maggiore di 8 rende positivo il numeratore ma negativo il denominatore e quindi negativa la frazione; il valore $x = \frac{5}{2}$ annulla la frazione.

In modo del tutto analogo a quello ora descritto si risolvono quelle disequazioni nelle quali è richiesto che sia positivo o negativo il prodotto di due o più fattori contenenti l'incognita.

Esempi:

1) Risolvere la disequazione:

$$(x - 5) (2x + 4) (7 - x) > 0$$

Studiamo innanzitutto il segno dei tre fattori individuando gli intervalli in cui ciascuno di essi è positivo (e di conseguenza quelli in cui ciascuno di essi è negativo):

$$x - 5 > 0 \quad \text{per } x > 5$$

$$2x + 4 > 0 \quad \text{per } x > -2$$

$$7 - x > 0 \quad \text{per } x < 7$$

Rappresentiamo ora graficamente, su tre rette distinte e sulle quali sia stato fissato uno stesso sistema di ascisse, gli intervalli di positività di ciascuno dei fattori (fig. 5.7)

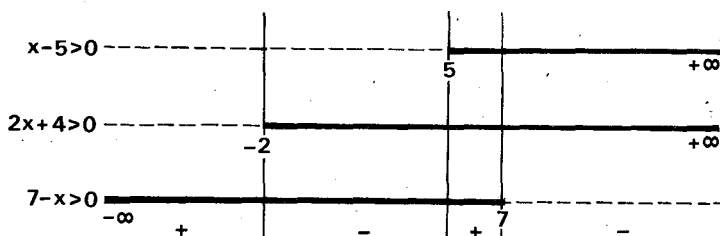


Figura 5.7 Il tratto continuo di ogni retta indica l'intervallo in cui il corrispondente fattore è positivo, quello tratteggiato l'intervallo in cui è negativo.

Dall'esame del grafico e dalla regola dei segni relativa al prodotto di due o più fattori si deduce che l'espressione $(x - 5) (2x + 4) (7 - x)$ è positiva per $x < -2$ e per $5 < x < 7$. I valori di x soddisfacenti o all'una o all'altra di queste condizioni sono le soluzioni della disequazione proposta.

2) Risolvere la disequazione

$$\frac{(x+1)(2-x)}{2x-3} > 0$$

Dopo aver posto $x \neq \frac{3}{2}$ stabiliamo gli intervalli in cui ciascun fattore del numeratore e del denominatore è positivo:

$$x + 1 > 0 \quad \text{per } x > -1$$

$$2 - x > 0 \quad \text{per } x < 2$$

$$2x - 3 > 0 \quad \text{per } x > \frac{3}{2}$$

Rappresentiamo ora graficamente, su tre rette distinte, gli intervalli di positività di ciascun fattore (fig. 5.8):

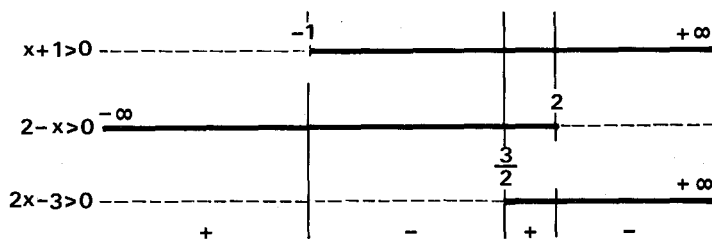


Figura 5.8 Rappresentazione grafica degli intervalli di positività e di negatività dei tre termini $x + 1$, $2 - x$ e $2x - 3$.

Dal grafico appare chiaramente che i valori di x per i quali la frazione assume valore positivo, e che quindi verificano la disuguaglianza, sono quelli che soddisfano o all'una o all'altra delle due condizioni

$$x < -1 ; \quad \frac{3}{2} < x < 2$$

Infatti, per ogni valore di $x < -1$ il numeratore della frazione assume valore negativo (essendo i suoi due fattori uno negativo e l'altro positivo), ed anche il denominatore assume valore negativo e pertanto la frazione è positiva; per ogni valore di x compreso tra -1 e $\frac{3}{2}$ il numeratore è positivo (essendo positivi i suoi due fattori) mentre il denominatore è negativo e quindi è negativa la frazione; per ogni x compreso tra $\frac{3}{2}$ e 2 sono positivi sia il numeratore (fattori entrambi positivi) che il denominatore e pertanto è positiva la frazione; per ogni $x > 2$ la frazione ha il numeratore negativo (un fattore positivo ed uno negativo) ed il denominatore positivo e pertanto è negativa; infine, per $x = -1$ e per $x = 2$ la frazione assume valore 0.

3) Risolvere la disequazione

$$\frac{x(2-x)}{(x+3)(5-x)} \geq 0$$

Deve essere $x \neq -3$ e $x \neq 5$.

Individuiamo gli intervalli di positività di ciascuno dei fattori del denominatore e gli intervalli in cui ciascuno dei fattori del numeratore è positivo o nullo, quindi rappresentiamoli graficamente su quattro rette distinte:

$$x \geq 0 \quad \text{per} \quad x \geq 0$$

$$2 - x \geq 0 \quad \text{per} \quad x \leq 2$$

$$x + 3 > 0 \quad \text{per} \quad x > -3$$

$$5 - x > 0 \quad \text{per} \quad x < 5$$

Dal grafico (fig. 5.9) appare che i valori x per i quali la disequazione è soddisfatta sono quelli soddisfacenti ad una delle seguenti condizioni

$$x < -3; \quad 0 \leq x \leq 2; \quad x > 5$$

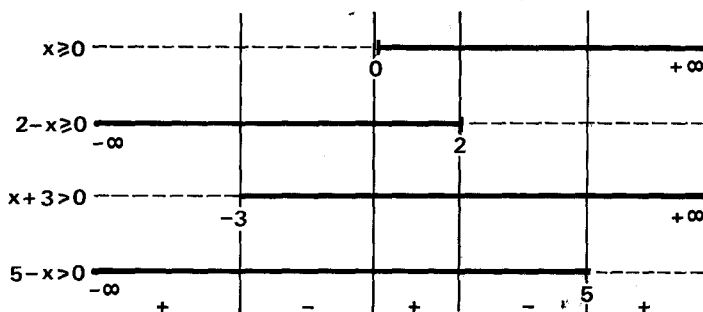


Figura 5.9 Rappresentazione grafica degli intervalli di positività e di negatività dei fattori del numeratore e del denominatore della frazione in esame. Il trattino verticale sulle prime due rette indica per quali valori i fattori del numeratore si annullano.

4) Risolvere la disequazione

$$x(3x + 1)(2 - x) < 0$$

Ricerchiamo anche in questo caso gli intervalli di positività dei singoli fattori del prodotto:

$$x > 0 \quad \text{per} \quad x > 0$$

$$3x + 1 > 0 \quad \text{per} \quad x > -\frac{1}{3}$$

$$2 - x > 0 \quad \text{per} \quad x < 2$$

e rappresentiamoli graficamente su tre rette distinte (fig. 5.10).

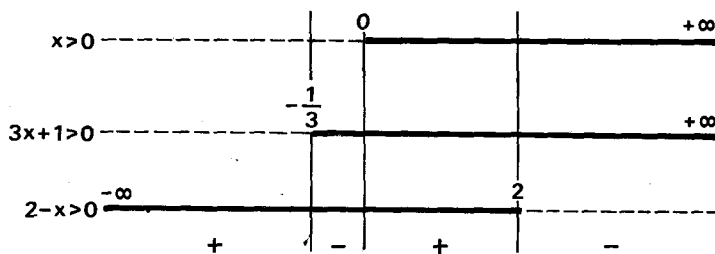


Figura 5.10 Rappresentazione grafica dei risultati relativi allo studio del segno dei singoli fattori del prodotto.

Come appare dal grafico, affinché la disequazione sia soddisfatta, affinché cioè sia negativo il valore assunto dal prodotto, deve essere

$$-\frac{1}{3} < x < 0 \quad \text{oppure} \quad x > 2$$

5) Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 5$$

Deve essere $x \neq 2$.

Trasportiamo a sinistra il 5; quindi riduciamo tutto allo stesso denominatore

$$\frac{x+1}{x-2} - 5 \leq 0; \quad \frac{x+1-5x+10}{x-2} \leq 0; \quad \frac{-4x+11}{x-2} \leq 0$$

Ricerchiamo ora gli intervalli di positività del numeratore e del denominatore della frazione; quindi rappresentiamo graficamente tali intervalli (fig. 5.11):

$$\begin{aligned} -4x+11 &\geq 0 && \text{per } x \leq \frac{11}{4} \\ x-2 &> 0 && \text{per } x > 2 \end{aligned}$$

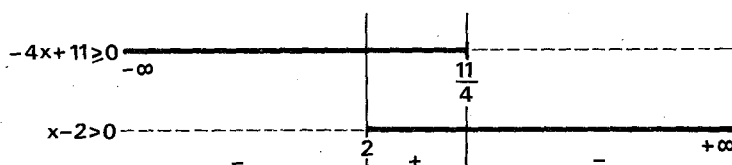


Figura 5.11 Rappresentazione grafica dei risultati relativi allo studio del segno dei termini della frazione in esame. Il trattino verticale sulla prima retta indica il valore per il quale il numeratore della frazione, e quindi la frazione stessa, si annulla.

Gli intervalli nei quali la disequazione è soddisfatta sono

$$x < 2 \quad \text{e} \quad x \geq \frac{11}{4}$$

Il numero $\frac{11}{4}$ è compreso tra le soluzioni della disequazione perché annulla la frazione.