

1

COORDINATE ASCISSE SULLA RETTA E COORDINATE CARTESIANE ORTOGONALI NEL PIANO

1.1 Coordinate ascisse sulla retta

Come già abbiamo detto, per poter essere in grado di studiare mediante l'algoritmo algebrico le proprietà di figure geometriche, occorre individuare i punti che costituiscono le figure stesse mediante dei numeri. Questa individuazione può venir fatta in diversi modi; di questi il più usato (e che noi useremo) è quello delle *coordinate ascisse per i punti di una retta* e delle *coordinate cartesiane ortogonali per i punti di un piano*.

Introduciamo ora le coordinate ascisse sulla retta.

Sia r una retta orientata, sulla quale cioè è fissato un senso di percorrenza indicato da una freccia. Diciamo che percorriamo la retta in senso positivo quando la percorriamo nel senso dell'orientazione prefissata, in senso negativo quando la percorriamo nel senso opposto. Un punto O della retta, arbitrariamente scelto, divide la retta stessa in due semirette: chiamiamo positiva quella che, partendo da O , viene percorsa in senso positivo, e negativa l'altra (fig. 1-1).

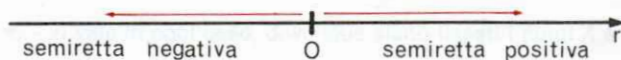


Fig. 1-1. Un generico punto O di una retta orientata divide la retta stessa in due semirette, una detta positiva e l'altra detta negativa.

Se A e B sono due punti, al segmento avente questi punti come estremi possono venir associate due diverse orientazioni; il segmento può infatti venir percorso da A verso B o da B verso A . Se il segmento è orientato da A verso B lo indicheremo con AB , se è orientato da B verso A con BA .

Un segmento appartenente ad una retta orientata r diremo che ha *misura algebrica positiva* (rispetto ad un prefissato segmento u assunto come unità di misura), o più semplicemente che è *positivo*, se è orientato concordemente con r ; diremo che ha *misura algebrica negativa*, o che è *negativo*, se è orientato nel verso contrario a quello di r . Nelle figure 1-2 a) e b) sono rappresentati due segmenti AB positivi, mentre nelle figure 1-2 c) e d) due segmenti AB negativi.

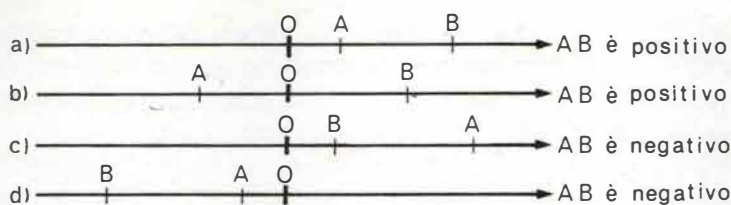


Fig. 1-2. Il segmento AB di r è positivo se è orientato concordemente con r , negativo in caso contrario.

Varrà naturalmente la relazione:

$$AB = -BA$$

e pertanto sarà:

$$AB + BA = 0.$$

Siamo ora in grado, mediante questi semplici concetti introdotti, di stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di una retta orientata r , sulla quale sia stato arbitrariamente scelto un punto O , e l'insieme dei numeri reali relativi. Procediamo così: facciamo corrispondere ad un generico punto P di r quel numero reale relativo x che esprime la misura algebrica del segmento orientato OP , rispetto ad una prefissata unità di misura u (x sarà positivo se P giace sulla semiretta positiva, negativo se P giace sulla semiretta negativa); viceversa, ad ogni numero reale x facciamo corrispondere quel punto P tale che la misura algebrica del segmento orientato OP sia x (P sarà sulla semiretta positiva se x è positivo, su quella negativa se x è negativo).

Al punto O vengono a corrispondere i due numeri $+0$ e -0 , che, come sappiamo, sono tra loro uguali.

La corrispondenza fissata è certamente biunivoca in quanto ad ogni punto di r corrisponde uno ed un solo numero reale relativo e, viceversa, ad ogni numero reale relativo corrisponde uno ed un solo punto di r .

Il numero x viene chiamato **coordinata ascissa**, o semplicemente **ascissa** di P ; per indicare che il punto P ha come ascissa il numero x si scrive $P(x)$; il punto O viene chiamato *origine delle ascisse*.

Il sistema introdotto per individuare i punti di una retta con i numeri reali relativi viene chiamato un **sistema di coordinate ascisse**.

Esempio

Rappresentare su una retta, sulla quale sia fissato un sistema di coordinate ascisse, i punti $A(+4)$, $B(-5)$, $C(+\frac{3}{2})$, $D(-2,5)$.

Nella figura 1-3 sono rappresentati i punti dati; l'unità di misura è stata arbitrariamente scelta.

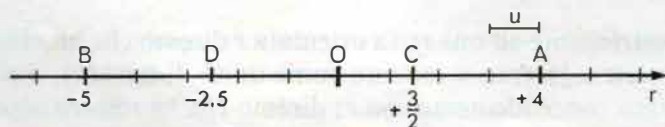


Fig. 1-3. Rappresentazione dei punti dati su di una retta r sulla quale è fissato un sistema di coordinate ascisse.

È evidente che con la corrispondenza fissata, all'ente geometrico punto della retta r viene a corrispondere, in modo biunivoco, l'ente numero relativo; ogni relazione geometrica tra gli enti punti di r potrà quindi venir tradotta in una relazione algebrica tra numeri reali: questo è appunto lo scopo che ci eravamo proposti.

1.2 Distanza orientata e assoluta tra due punti di una retta orientata.

Ascissa del punto medio di un segmento

Siano $A(x_1)$ e $B(x_2)$ due punti di una retta r sulla quale è fissato un sistema di ascisse. Per distanza orientata tra i due punti A e B , presi in questo ordine, si intende la misura algebrica del segmento AB (la indicheremo con $\overline{AB}$); per distanza assoluta si intende il valore assoluto della distanza orientata (la indicheremo con $|\overline{AB}|$).

Per determinare il valore della distanza orientata osserviamo la figura 1-4, nella quale i due punti $A(x_1)$ e $B(x_2)$ sono stati fissati entrambi sulla semiretta positiva ed in modo che il segmento AB abbia orientazione positiva.



Fig. 1-4. I punti A e B sono entrambi situati sulla semiretta positiva ed AB è un segmento positivo. Evidentemente è $\overline{AB} = x_2 - x_1$.

Sarà evidentemente:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

e quindi

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = x_2 - x_1.$$

Possiamo allora dire che la distanza orientata tra i due punti A e B è uguale alla differenza tra l'ascissa del secondo e quella del primo. La relazione ottenuta vale dovunque siano fissati A e B sulla retta r ; a riprova di questa affermazione osserviamo la figura 1-5, nella quale A e B sono situati sulle due semirette opposte.



Fig. 1-5. La relazione $\overline{AB} = x_2 - x_1$ vale in ogni caso, dovunque siano fissati i punti A e B sulla r .

In questo caso sarà:

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB}$$

e quindi:

$$\overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1.$$

Generalizzando possiamo allora concludere che:

la distanza orientata tra due punti di una retta, sulla quale è fissato un sistema di ascisse, è uguale alla differenza tra l'ascissa del secondo punto e quella del primo.

Cioè:

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

La distanza in valore assoluto tra $A(x_1)$ e $B(x_2)$ sarà:

$$|\overline{AB}| = |x_2 - x_1|$$

Esempi

1) Trovare la distanza orientata e quella assoluta tra i punti $A(10)$ e $B(14)$.

La distanza orientata sarà:

$$\overline{AB} = 14 - 10 = +4$$

e quella assoluta:

$$|\overline{AB}| = |+4| = 4.$$

2) Trovare la distanza orientata e quella assoluta tra i punti $A(-4)$ e $B(5)$.

Sarà:

$$\overline{AB} = 5 - (-4) = 5 + 4 = +9 \quad \text{e} \quad |\overline{AB}| = |+9| = 9.$$

3) Trovare la distanza orientata e quella assoluta tra i punti $A(-1)$ e $B(-5)$.

Sarà:

$$\overline{AB} = -5 - (-1) = -5 + 1 = -4 \quad \text{e} \quad |\overline{AB}| = |-4| = 4.$$

Per determinare l'ascissa del punto medio M di un segmento di estremi $A(x_1)$ e $B(x_2)$ consideriamo la figura 1-6.

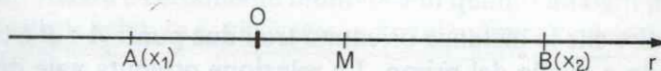


Fig. 1-6. M è il punto medio del segmento AB .

Sarà ovviamente:

$$\overline{AM} = \overline{MB}$$

e quindi, indicando con x_M l'ascissa di M :

$$x_M - x_1 = x_2 - x_M.$$

Da questa relazione si ottiene:

$$2x_M = x_1 + x_2$$

ed anche:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Concludiamo quindi affermando che:

L'ascissa del punto medio di un segmento è uguale alla semisomma delle ascisse degli estremi del segmento stesso.

Esempi

1) Trovare l'ascissa del punto medio M del segmento di estremi $A(3)$ e $B(-5)$.

Sarà:

$$x_M = \frac{3 + (-5)}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1.$$

2) Trovare l'ascissa del punto medio M del segmento di estremi $A(-8)$ e $B(-2)$.

Sarà:

$$x_M = \frac{-8 + (-2)}{2} = \frac{-8 - 2}{2} = -5.$$

1.3 Coordinate cartesiane ortogonali nel piano

Nel primo paragrafo di questo capitolo abbiamo visto come, fissato su una retta orientata un sistema di ascisse, sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta e l'insieme dei numeri reali relativi. Questa corrispondenza ci permette di individuare i punti di una retta mediante dei numeri.

Ci proponiamo ora di estendere il metodo introdotto per riuscire ad individuare mediante numeri anche i punti di un piano. Riusciremo in questo intento stabilendo una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di un piano e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali relativi.

A tale scopo consideriamo nel piano due rette orientate, tra loro perpendicolari, e fissiamo su entrambe un sistema di ascisse con l'origine comune nel punto O d'intersezione delle rette stesse e con la medesima unità di misura (questa ultima scelta è dettata solo dalla comodità; spesso è però assai più utile, nei casi pratici, scegliere unità di misura diverse per i due sistemi). Queste rette vengono generalmente indicate con le lettere x e y e rispettivamente chiamate *asse delle ascisse* (o *delle x*) e *asse delle ordinate* (o *delle y*). Vedi fig. 1-7.

Consideriamo ora un generico punto P del piano; conduciamo da esso le perpendicolari all'asse delle ascisse e a quello delle ordinate, fino ad incontrarli rispettivamente nei punti P_1 e P_2 .

Ai due punti P_1 e P_2 corrispondono, nei sistemi di coordinate fissati sui due assi, due numeri reali relativi x e y . Facciamo allora corrispondere al punto P la coppia ordinata di numeri $(x; y)$. Viceversa, data una coppia ordinata di numeri reali relativi $(x; y)$ fissiamo sull'asse delle ascisse il punto P_1 corrispondente al numero x e sull'asse delle ordinate il punto P_2 corrispondente al numero y ; mandiamo da P_1 la perpendicolare all'asse delle ascisse e da P_2 la perpendicolare all'asse delle ordinate: alla coppia di numeri $(x; y)$ facciamo corrispondere il punto P intersezione delle due dette perpendicolari. Questa corrispondenza è evidentemente biunivoca (vedi fig. 1-8).

I numeri x e y si chiamano le **coordinate** del punto P ; il primo si chiama **ascissa** di P ed il secondo **ordinata**. Per indicare che il punto P ha per coordinate i numeri x e y si scrive $P(x; y)$. Il sistema introdotto per individuare i punti di un piano con delle coppie di numeri reali relativi viene chiamato un **sistema di coordinate cartesiane ortogonali**.

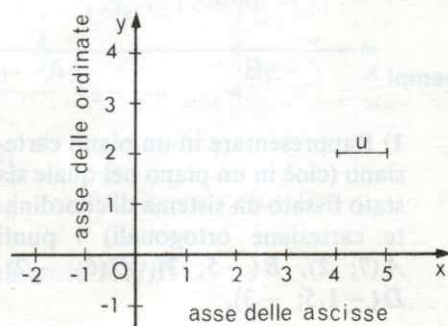


Fig. 1-7. Schema di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

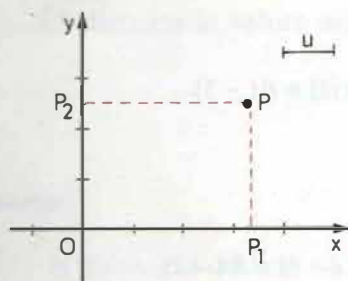
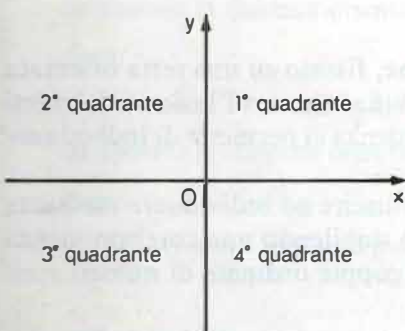


Fig. 1-8. Se in un piano è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, ad ogni punto P del piano corrisponde la coppia ordinata di numeri $x = \overline{OP_1}$, $y = \overline{OP_2}$; e viceversa.



quadrante	ascissa	ordinata
1°	+	+
2°	-	+
3°	-	-
4°	+	-

Fig. 1-9. Gli assi cartesiani ortogonali dividono il piano in quattro angoli retti, denominati quadranti.

Tutti i punti dell'asse delle x hanno ordinata nulla; tutti quelli dell'asse delle y hanno ascissa nulla; l'origine ha nulle entrambe le coordinate. Tutti i punti di una retta parallela all'asse delle x hanno la stessa ordinata, mentre tutti i punti di una retta parallela all'asse delle y hanno la stessa ascissa.

Esempi

1) Rappresentare in un piano cartesiano (cioè in un piano nel quale sia stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali) i punti $A(7; 2)$, $B(-5; 3)$, $C(6; -2)$, $D(-1,5; -3)$.

Nella figura 1-10 sono rappresentati i punti assegnati; l'unità di misura è stata fissata arbitrariamente.

2) Rappresentare in un piano cartesiano i punti $A(3; 0)$, $B(0; -4)$, $C(-5; 0)$, $D(4; 2)$, $E(-3; 2)$, $F(-3; -2)$.

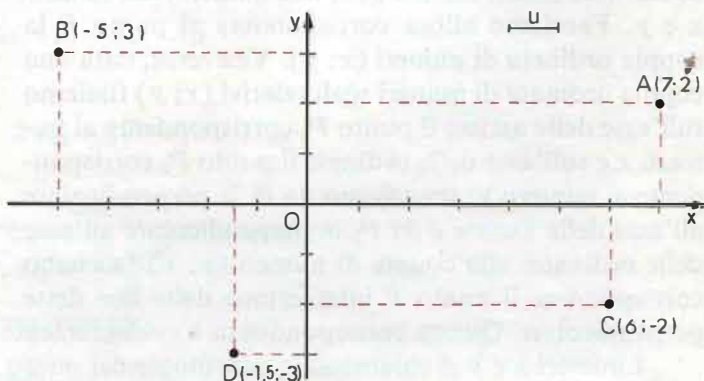


Fig. 1-10. Rappresentazione grafica dei quattro punti assegnati mediante le loro coordinate cartesiane ortogonali.

Nella figura 1-11 sono evidenziate le immagini dei sei punti.

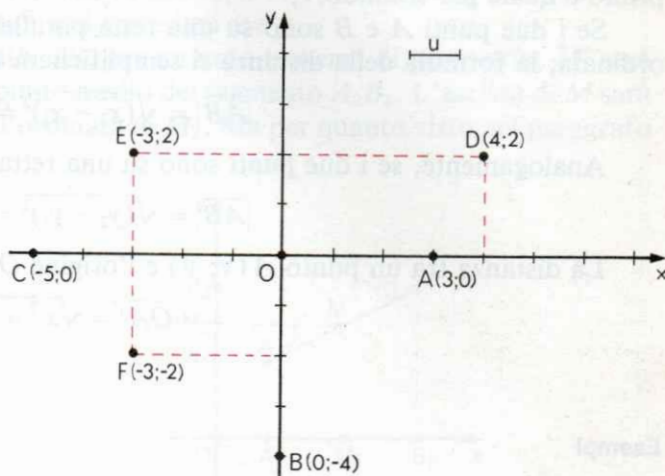
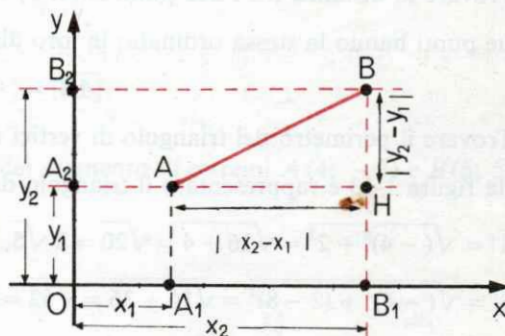


Fig. 1-11. Rappresentazione nel piano cartesiano dei sei punti assegnati.

1.4 Distanza assoluta tra due punti di un piano cartesiano. Coordinate del punto medio di un segmento

Ci proponiamo ora di determinare la distanza assoluta tra due punti di un piano cartesiano. Siano $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ i due punti; rappresentiamoli nel piano cartesiano e congiungiamoli; tracciamo quindi da A e da B le perpendicolari AA_1 e BB_1 all'asse delle ascisse e le perpendicolari AA_2 e BB_2 all'asse delle ordinate (fig. 1-12).

Fig. 1-12. Per determinare la distanza assoluta tra i due punti A e B basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB .



Sarà ovviamente:

$$|AH| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|$$

$$|BH| = |B_2A_2| = |y_2 - y_1|$$

e, per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo AHB :

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Concludiamo quindi affermando che:

la distanza assoluta tra due punti di un piano, nel quale è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze tra le coordinate omonime dei due punti stessi.

Si noti che la distanza assoluta tra due punti non dipende da quale di essi si assume per primo e quale per secondo.

Se i due punti A e B sono su una retta parallela all'asse delle ascisse, avranno la stessa ordinata; la formula della distanza si semplificherà allora così:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Analogamente, se i due punti sono su una retta parallela all'asse delle ordinate sarà:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

La distanza tra un punto $A(x; y)$ e l'origine $O(0; 0)$ sarà poi:

$$|\overline{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

/ Esempi

1) Trovare la distanza tra i punti $A(3; 6)$ e $B(2; 8)$.

Avremo:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (8 - 6)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

2) Trovare la distanza tra i due punti $A(-5, 2)$ e $B(3; -6)$.

Sarà:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(3 + 5)^2 + (-6 - 2)^2} = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}.$$

3) Trovare la distanza tra i due punti $A(4; 5)$ e $B(-2; 5)$.

I due punti hanno la stessa ordinata; la loro distanza sarà quindi:

$$|\overline{AB}| = |-2 - 4| = 6.$$

4) Trovare il perimetro del triangolo di vertici $O(0; 0)$, $A(-4; 2)$, $B(0; 8)$.

Nella figura 1-13 è rappresentato il triangolo dato. Le misure dei suoi lati sono:

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, \quad |\overline{OB}| = |8 - 0| = 8.$$

Indicando con $2p$ il perimetro del triangolo è quindi:

$$2p = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{13} + 8 = 2(\sqrt{5} + \sqrt{13} + 4).$$

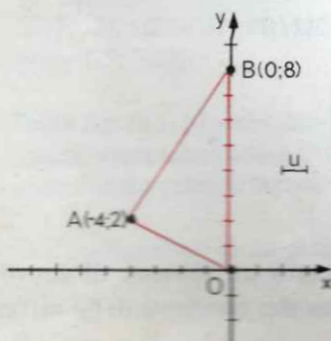


Fig. 1-13. Del triangolo OAB qui disegnato è richiesta la misura del perimetro.

Per determinare le coordinate del punto medio M di un segmento di estremi $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ prendiamo in esame la figura 1-14, nella quale A_1 e A_2 , B_1 e B_2 , M_1 e M_2 sono le proiezioni ortogonali dei punti A , B , M sugli assi cartesiani x e y .

Poiché M è il punto medio del segmento AB , per un noto teorema di geometria, M_1 sarà il punto medio del segmento A_1B_1 ed M_2 il punto medio del segmento A_2B_2 . L'ascissa di M sarà uguale all'ascissa di M_1 e l'ordinata di M all'ordinata di M_2 . Ma per quanto visto nel paragrafo

1.2 l'ascissa di M_1 è $\frac{x_1 + x_2}{2}$ e l'ordinata di M_2 è $\frac{y_1 + y_2}{2}$. Indicando con x_M e y_M le coordinate di M sarà pertanto:

$$\boxed{\begin{aligned} x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}}$$

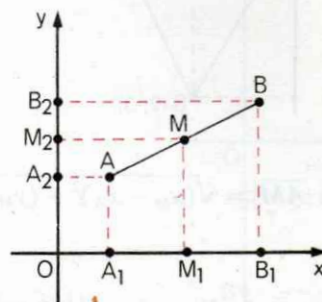


Fig. 1-14. Se M è il punto medio del segmento AB , M_1 ed M_2 sono i punti medi rispettivamente dei segmenti A_1B_1 e A_2B_2 , proiezioni del segmento AB sugli assi x e y .

Possiamo quindi affermare che:

le coordinate del punto medio di un segmento sono uguali alle semisomme delle omologhe coordinate degli estremi del segmento stesso.

Esempi

- 1) Trovare le coordinate del punto medio M del segmento di estremi $A(4; -3)$ e $B(6; 5)$.

Sarà:

$$x_M = \frac{4 + 6}{2} = 5 \quad \text{e} \quad y_M = \frac{-3 + 5}{2} = 1.$$

Nella figura 1-15 sono rappresentati i punti dati ed il punto medio richiesto.

- 2) Determinare la misura della mediana AM del triangolo di vertici $A(4; 1)$, $B(2; -3)$, $C(-1; 2)$.

Nella figura 1-16 è rappresentato il triangolo dato.

Per risolvere il problema proposto dovremo prima determinare le coordinate di M , punto medio del segmento BC , quindi trovare la misura del segmento AM .

Sarà:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

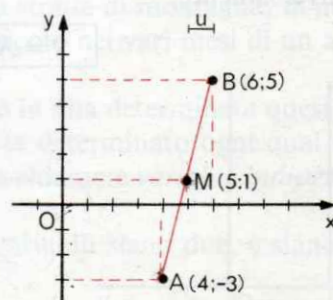


Fig. 1-15. M è il punto medio del segmento AB .

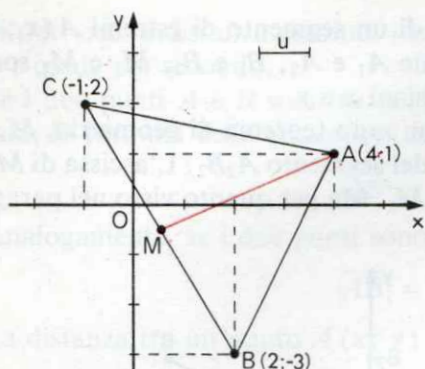


Fig. 1-16. Il segmento AM , di cui si chiede la misura, è una mediana del triangolo ABC .

$$\text{E quindi } |AM| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 4\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{58}}{2}.$$

1.5 Traslazione degli assi cartesiani

Al fine di risolvere alcuni particolari problemi che ci capiterà di dover affrontare in seguito, sarà utile imparare a passare da un sistema di riferimento cartesiano ortogonale ad un altro della stessa natura. Effettuare un tale passaggio significa determinare le coordinate di un punto rispetto ad una certa coppia di assi cartesiani X, Y quando siano note le coordinate dello stesso punto rispetto ad un'altra coppia di assi x, y .

Affronteremo qui il problema del cambiamento del sistema di riferimento solo nel caso i nuovi assi X e Y siano paralleli ed ugualmente orientati rispetto ai vecchi assi x e y e l'unità di misura sia la stessa per entrambi i sistemi. In questo caso si dice che il nuovo sistema di riferimento è *traslato* rispetto al vecchio. Nella figura 1-17 sono rappresentati due sistemi di riferimento, l'uno traslato rispetto all'altro.

Se indichiamo con $(a; b)$ le coordinate che l'origine O' del sistema cartesiano ortogonale $XO'Y$ ha rispetto al sistema cartesiano ortogonale xOy , con $(x; y)$ le coordinate di un generico punto P rispetto al sistema xOy , con $(X; Y)$ le coordinate dello stesso punto P rispetto all'altro sistema (fig. 1-18), sarà evidentemente:

$$X = x - a$$

e

$$Y = y - b$$

e, inversamente:

$$x = X + a$$

e

$$y = Y + b$$

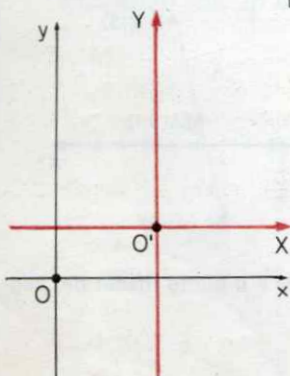


Fig. 1-17. I due sistemi cartesiani ortogonali xOy e $XO'Y$ e, con gli assi paralleli ed equiversi, si ottengono l'uno dall'altro mediante una traslazione.

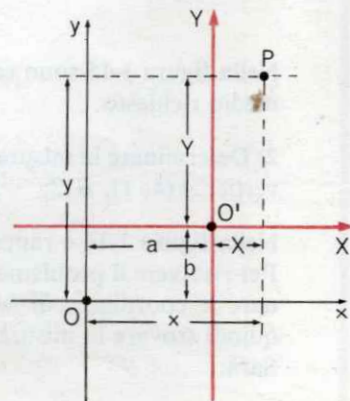


Fig. 1-18. Sono qui evidenziate le coordinate di P rispetto ai due sistemi cartesiani ortogonali, tra loro traslati, xOy e $XO'Y$.

Esempio

In un sistema cartesiano ortogonale xOy sono dati i punti $A(3; 5)$ e $B(0; -3)$; determinare le coordinate degli stessi punti rispetto ad un secondo sistema $XO'Y$, traslato rispetto al primo, di origine $O'(2; -4)$.

Applichiamo le formule delle traslazioni, tenendo presente che $a = 2$ e $b = -4$; avremo:

$$X_A = x_A - a = 3 - 2 = 1,$$

$$Y_A = y_A - b = 5 - (-4) = 5 + 4 = 9$$

e:

$$X_B = x_B - a = 0 - 2 = -2,$$

$$Y_B = y_B - b = -3 - (-4) = -3 + 4 = 1.$$

Rispetto al nuovo sistema sarà pertanto: $A(1; 9)$ e $B(-2; 1)$. Nella figura 1-19 è graficamente illustrato il problema proposto.

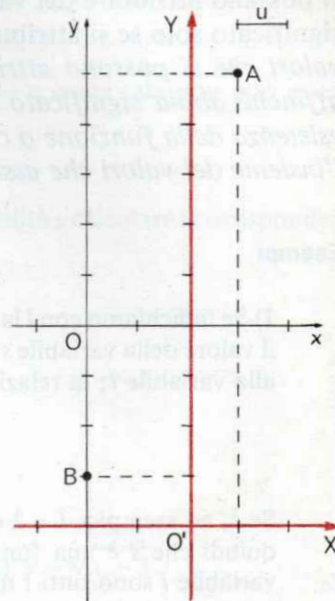


Fig. 1-19. Note le coordinate di A e di B rispetto al sistema di riferimento xOy , è richiesto di determinare le coordinate dei medesimi punti rispetto al sistema traslato $XO'Y$.

1.6 Il concetto di funzione

Com'è noto, mediante l'aiuto della matematica si possono esaminare e studiare molti problemi di carattere sia teorico che pratico, molti fenomeni fisici, chimici, tecnici, ecc. In ciascuna di queste questioni compaiono delle grandezze, o più in generale, delle quantità, alcune delle quali assumono sempre lo stesso valore, mentre altre possono subire delle variazioni, possono cioè assumere valori diversi; alle prime viene dato il nome di *costanti*, alle seconde di *variabili*. Sono, per esempio, quantità costanti la velocità della luce nel vuoto, la carica dell'elettrone, la distanza tra due punti di un corpo rigido, ecc.; sono quantità variabili la temperatura durante una giornata, la velocità di un ciclista che percorre una strada di montagna, la mutua distanza tra due molecole di un gas, il costo di un prodotto agricolo nei vari mesi di un anno, e così via.

Accade spesso che tra le diverse grandezze variabili in gioco in una determinata questione, esistano dei legami, in modo che il valore di alcune di esse resta determinato ogni qual volta viene assegnato il valore delle altre. Queste ultime vengono allora chiamate *variabili indipendenti*, le altre *variabili dipendenti*.

Ci occuperemo ora solo di quei problemi le cui quantità variabili siano due, e siano una univocamente dipendente dall'altra.

Due quantità variabili, che indicheremo genericamente con x e y , sono l'una univocamente dipendente dall'altra, quando ad ogni assegnato valore della prima corrisponde uno ed un solo valore della seconda; diremo allora che la variabile y è una funzione della variabile x . Per indicare ciò scriveremo:

$$y = f(x)$$

(leggi « y uguale effe di x »).

Il fatto che una variabile sia indipendente non significa però necessariamente che ad essa si possano attribuire dei valori del tutto arbitrari. Molti legami tra due variabili hanno infatti significato solo se si attribuiscono alla variabile indipendente convenienti valori. *L'insieme dei valori che si possono attribuire alla variabile indipendente affinché sussista il legame (cioè affinché abbia significato la funzione f) si chiama campo (o insieme) di definizione o di esistenza della funzione o campo di variabilità della variabile indipendente, o dominio della f ; l'insieme dei valori che assume la variabile dipendente viene denominato codominio della f .*

Esempi

1) Se indichiamo con l la misura del lato di un triangolo equilatero e con s l'area della sua superficie, il valore della variabile s sarà completamente determinato ogni qual volta verrà attribuito un valore alla variabile l ; la relazione che intercorre tra l ed s è, come noto, la seguente:

$$s = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Se è, ad esempio, $l = 2$ cm, sarà $s = \sqrt{3}$ cm²; se è $l = 4$ cm, sarà $s = 4\sqrt{3}$ cm², e così via. Diremo quindi che s è una funzione di l , e scriveremo $s = f(l)$. I valori che si possono attribuire alla variabile l sono tutti i numeri reali non negativi, poiché non negativa deve essere la misura di un segmento; la funzione è pertanto definita per $l \geq 0$.

2) Se un corpo di massa m , inizialmente fermo, è sottoposto ad una forza costante di intensità f , la sua accelerazione a è pure costante ed uguale a $\frac{f}{m}$; al contrario la sua velocità v varierà nel tempo secondo la legge:

$$v = \frac{f}{m} t.$$

età (in anni)	altezza (in cm)
0	52
1	70
2	76
3	81
4	90
5	95
6	102
7	120
8	129
9	135
10	140

Ad ogni valore di t corrisponderà uno ed uno solo valore di v ; diremo quindi che la velocità è una funzione del tempo e scriveremo $v = f(t)$. La funzione è definita per $t \geq 0$. In questa questione le quantità f ed m sono delle costanti, t e v delle variabili, indipendente la prima, dipendente la seconda.

3) Nella tabella a fianco sono riportati i valori dell'altezza di un bambino misurati alla nascita e poi successivamente al compimento degli anni, fino al decimo anno.

Anche questo è un esempio di funzione; le due quantità variabili sono l'età e l'altezza del bambino; chiameremo variabile indipendente la prima e dipendente la seconda e diremo che la seconda è una funzione della prima; se indichiamo con x l'età con h l'altezza scriveremo $h = f(x)$.

4) L'ipotenusa del triangolo ABC rettangolo in A (fig. 1-20) misura 8 cm; la misura del cateto AB sarà completamente determinata quando sia assegnata la misura del cateto AC ; indicando con x la misura, in centimetri, di AC e con y quella di AB , sarà, per il teorema di Pitagora:

$$y = \sqrt{64 - x^2}.$$

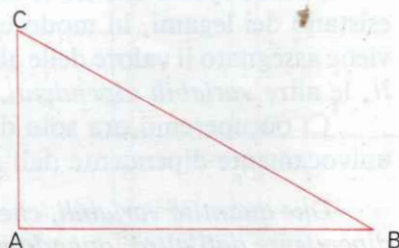


Fig. 1-20. L'ipotenusa BC del triangolo rettangolo misura 8 cm; la misura del cateto AB risulta determinata quando viene assegnata quella del cateto AC .

Com'è noto una radice di indice pari fornisce valori reali solo quando il radicando non è negativo. Affinché la variabile y (misura del segmento AB) assuma valori reali dovrà allora essere

$$64 - x^2 \geq 0 \quad \text{e quindi} \quad -8 \leq x \leq 8.$$

La variabile x rappresenta però la misura assoluta di un segmento e come tale non può essere negativa; il campo di esistenza della funzione in esame è pertanto:

$$0 \leq x \leq 8.$$

Possiamo ora attribuire alla x qualche valore del suo campo di variabilità e calcolare i corrispondenti valori assunti dalla y :

$$\text{per } x = 1 \quad \text{è} \quad y = \sqrt{63}$$

$$\text{per } x = 2 \quad \text{è} \quad y = \sqrt{60}$$

$$\text{per } x = 5 \quad \text{è} \quad y = \sqrt{39}$$

e così via.

5) Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$a) y = \frac{x}{x^2 + 3x} \quad b) y = \frac{x-3}{x^2 + 4} \quad c) y = \sqrt{x^2 - 7x + 6} \quad d) y = \sqrt[3]{x-3}.$$

a) La prima funzione è un rapporto tra due polinomi; questo rapporto ha significato per ogni valore di x che non annulla il denominatore; deve quindi essere

$$x^2 + 3x \neq 0 \quad \text{e pertanto} \quad x \neq -3 \quad \text{e} \quad x \neq 0.$$

La funzione è definita per ogni valore reale di x diverso da -3 e da 0 .

b) Analogamente, affinché sia definita la seconda funzione deve essere

$$x^2 + 4 \neq 0.$$

Questa condizione è verificata per ogni valore reale di x ; il campo di variabilità della x è pertanto l'intero insieme dei numeri reali.

c) Affinché sia definita la terza funzione occorre sia non negativo il radicando, cioè sia

$$x^2 - 7x + 6 \geq 0.$$

Questa condizione è verificata per $x \leq 1$ e per $x \geq 6$.

d) Poiché una radice di indice dispari fornisce valori reali per qualunque valore reale del radicando, la quarta funzione è definita per ogni valore reale della variabile x .

Abbiamo ora esaminato alcuni esempi di funzioni; in essi è stata presa in considerazione una questione nella quale compaiono due quantità variabili tra le quali intercorre una particolare relazione. È importante notare che la relazione che intercorre tra le due variabili x e y può essere di qualsiasi natura, purché sia conosciuta, cioè sia tale da far corrispondere ad ogni valore della variabile indipendente x , appartenente al campo di definizione, uno ed un solo valore della variabile dipendente y . Questa relazione di dipendenza che lega i valori della variabile y a quelli della x può essere esprimibile mediante un'espressione nella variabile x , in modo che il valore della y possa essere dedotto da quello della x per mezzo di una successione di operazioni da eseguirsi su quest'ultimo; in questo caso la funzione viene detta *analitica*. Questa è la situazione che si presenta negli esempi 1), 2), 4) e 5). Nell'esempio 3) la relazione tra le variabili non può invece tradursi in forma analitica; non si può infatti dedurre, per mezzo di calcoli, l'altezza del bambino dal valore della sua età; per conoscere l'altezza ad una determinata età è necessario

misurarla, cioè è necessario procedere per via sperimentale. Una tale funzione viene detta *sperimentale* o *empirica*. Altri esempi di funzioni empiriche sono la temperatura alle varie ore di una giornata, il numero di alunni iscritti ad una scuola in un certo numero di anni scolastici successivi, il costo di un prodotto agricolo durante un anno, ecc.

1.7 Rappresentazione grafica di una funzione

Al fine di studiare le proprietà di una funzione risulta assai utile rappresentarla graficamente in un piano nel quale sia stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali; una tale rappresentazione rende infatti più evidenti ed intuitive le caratteristiche della funzione stessa. La curva che rappresenta graficamente una funzione viene chiamata il suo *grafico* o *diagramma*. Per diagramma di una funzione $y = f(x)$ si intende l'insieme di tutti i punti del piano le cui coordinate, sostituite rispettivamente alla variabile x ed alla variabile y , soddisfano l'uguaglianza stessa.

Per esempio, i punti $P_1(0; 0)$, $P_2(1; 2)$, $P_3(2; 6)$ sono tre punti del grafico della funzione analitica $y = x^2 + x$; infatti, le loro coordinate, sostituite la prima alla x e la seconda alla y , rendono uguali i due membri di questa uguaglianza.

Per rappresentare graficamente, in un piano nel quale sia stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, una funzione $y = f(x)$, data analiticamente, si può procedere così: si attribuiscono alla variabile indipendente x alcuni valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ appartenenti al campo di definizione e si calcolano i corrispondenti valori assunti dalla variabile dipendente y ; siano essi $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $\dots, y_n = f(x_n)$. Si rappresentano quindi nel piano i punti $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $\dots, P_n(x_n; y_n)$: la curva che si ottiene congiungendo questi punti è approssimativamente il diagramma della funzione; più vicini tra loro sono i valori attribuiti alla x (e quindi più numerosi sono i punti rappresentati nel piano), migliore sarà l'approssimazione tra il grafico tracciato ed il vero diagramma della funzione.

Il metodo ora descritto per tracciare il grafico di una funzione (metodo chiamato anche studio della funzione per punti) non è però molto pratico; esso ci dà infatti l'andamento della funzione solo in un certo intervallo, non dandoci la possibilità di prevedere cosa succede al di fuori di esso; inoltre, quando si congiungono tra di loro due punti (soprattutto se non molto vicini) c'è una certa arbitrarietà di scelta sulla linea da seguire. Esistono dei metodi mediante i quali è possibile stabilire alcune delle caratteristiche fondamentali di una funzione analitica, e quindi del suo grafico, che potrà così venir meglio tracciato. Di questi metodi si occupano la geometria analitica e l'analisi matematica.

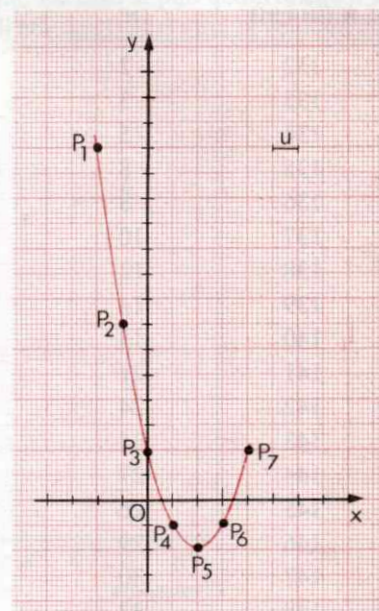
Se la funzione data è di tipo empirico per rappresentarla graficamente basterà rappresentare, e poi congiungere, i punti le cui coordinate sono le coppie di valori corrispondenti delle due variabili, già numericamente note.

Esempi

1) Rappresentare graficamente la funzione $y = x^2 - 4x + 2$ nell'intervallo $-2 \leq x \leq 4$.

Nella tabella sono elencati alcuni valori attribuiti alla variabile x (per semplicità di calcolo sono stati scelti valori interi) ed accanto ad essi i corrispondenti valori assunti dalla variabile y . Nella figura 1-21 è riportato il diagramma approssimato della funzione data; esso è stato ottenuto congiungendo i punti aventi per coordinate le coppie ordinate di numeri contenute nella tabella stessa, cioè i punti $P_1(-2; 14)$, $P_2(-1; 7)$, $P_3(0; 2)$, $\dots, P_7(4; 2)$.

x	$y = x^2 - 4x + 2$
-2	$(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 2 = 14$
-1	$(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 2 = 7$
0	$0 - 0 + 2 = 2$
1	$1 - 4 + 2 = -1$
2	$4 - 8 + 2 = -2$
3	$9 - 12 + 2 = -1$
4	$16 - 16 + 2 = 2$



2) Tracciare il grafico della funzione
 $y = \sqrt{16 - x^2}$.

Fig. 1-21. Rappresentazione grafica della funzione $y = x^2 - 4x + 2$ nell'intervallo $-2 \leq x \leq 4$.

Poiché una radice di indice pari fornisce valori reali solo quando il suo radicando è non negativo, affinché sia definita la funzione proposta deve essere $16 - x^2 \geq 0$.

L'insieme di esistenza di questa funzione è quindi l'intervallo $-4 \leq x \leq 4$. Attribuiamo alla variabile indipendente x dei valori appartenenti a questo insieme e calcoliamo i corrispondenti valori assunti dalla variabile dipendente y . Nella tabella qui di seguito riportata sono indicati detti valori e nella figura 1-22 è graficamente rappresentata la funzione.

x	$y = \sqrt{16 - x^2}$
-4	0
-3	$\sqrt{7} \approx 2,64$
-2	$\sqrt{12} \approx 3,46$
-1	$\sqrt{15} \approx 3,87$
0	4
1	$\sqrt{15} \approx 3,87$
2	$\sqrt{12} \approx 3,46$
3	$\sqrt{7} \approx 2,64$
4	0

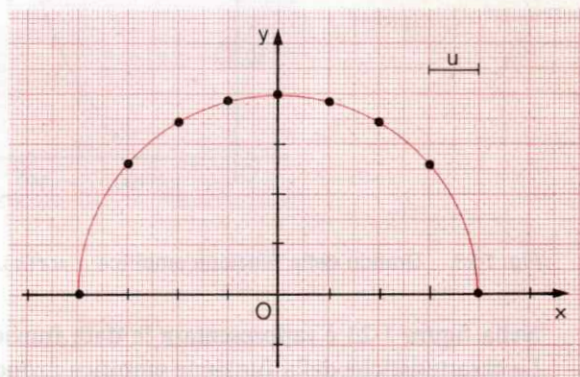


Fig. 1-22. Grafico della funzione $y = \sqrt{16 - x^2}$.

3) Sono state misurate le altezze, in centimetri, dei 622 alunni frequentanti una certa scuola media e si sono ottenuti i risultati riportati nella seguente tabella; in essa con h è stata indicata la variabile altezza e con n la frequenza con la quale una determinata altezza è stata registrata. Rappresentare graficamente nel piano cartesiano la funzione empirica $n = f(h)$.

h (in cm)	n	h (in cm)	n
132	2	151	32
133	3	152	30
134	5	153	26
135	8	154	24
136	8	155	22
137	10	156	22
138	12	157	20
139	14	158	18
140	18	159	16
141	21	160	15
142	24	161	10
143	25	162	6
144	27	163	7
145	26	164	7
146	29	165	5
147	30	166	3
148	32	167	1
149	31	168	1
150	32		

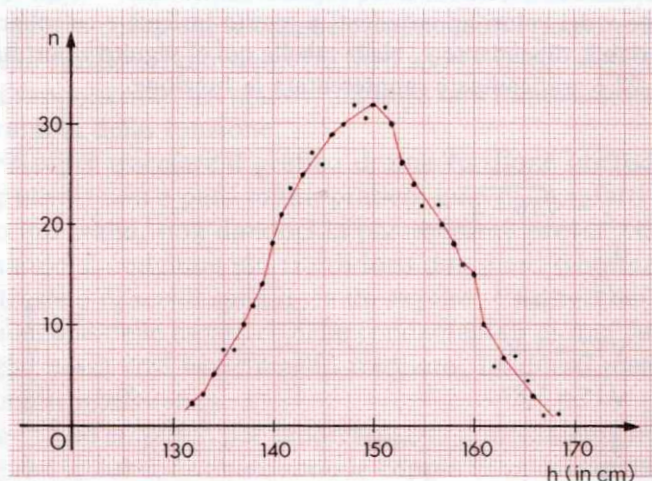


Fig. 1-23. Grafico della funzione empirica $n = f(h)$ relativa alla tabella qui riportata.

Nella figura 1-23 è rappresentata la data funzione empirica.

Le caratteristiche della funzione empirica proposta (caratteristiche per altro deducibili anche dalla tabella) vengono messe più in risalto dal diagramma della funzione stessa. Da questo appare infatti chiaramente che le maggiori frequenze si hanno per altezze prossime ai 150 cm, che la funzione $n = f(h)$ è crescente nell'intervallo 132 cm-150 cm, mentre diventa poi decrescente nell'intervallo 150 cm-168 cm e che il suo andamento è pressoché simmetrico rispetto al valore $h = 150$ cm.

4) Rappresentare graficamente la funzione empirica $h = f(x)$ riportata nell'esempio 3) del paragrafo 1.6.

Nella figura 1-24 è tracciato il diagramma di detta funzione. Da esso si può dedurre che il bambino è cresciuto più rapidamente nel primo e nel settimo anno di età; negli altri anni la velocità di crescita è stata piuttosto costante.

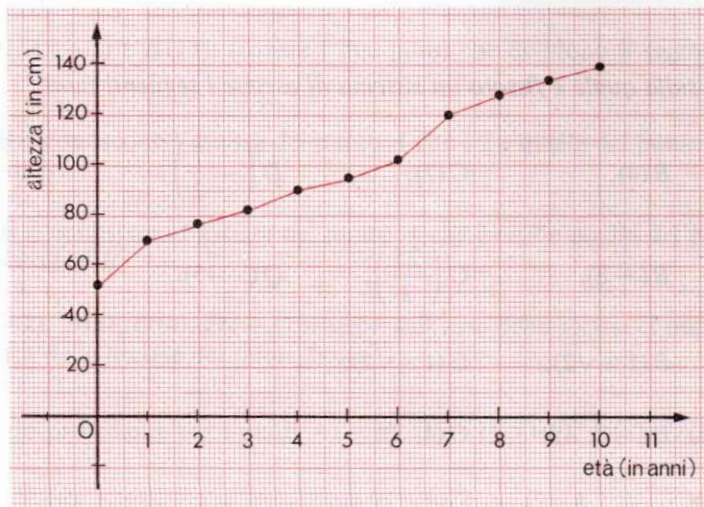


Fig. 1-24. Grafico della funzione empirica $h = f(x)$ riportata nella tabella dell'esempio 3) del paragrafo 1.6.