ESEMPI DI DIVISIONE TRA POLINOMI E LA REGOLA DI RUFFINI

I polinomi dividendo e divisore siano rispettivamente $A(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 2$ e $B(x) = x^2 + x - 3$.

I polinomi vanno scritti, ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile della quale sono funzioni (x, nel nostro caso), secondo la disposizione qui sotto indicata:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 2 & x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2}
 &
\end{array}$$

Quindi si divide il primo termine $2x^4$ del dividendo per il primo termine x^2 del divisore, ottenendo così il primo termine $2x^2$ del quoziente che si scrive sotto il divisore come indicato qui di seguito:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 2 & x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2}
 & 2x^2
\end{array}$$

Si moltiplica poi questo primo termine del quoziente per tutti i termini del divisore $B(x)$ e si sottrae il prodotto ottenuto da $A(x)$; questa operazione viene effettuata scrivendo tutti i termini di tale prodotto, con i segni cambiati, sotto i termini simili di $A(x)$, e sommandoli con essi come indicato qui sotto:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 2 & x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 2x^3 + 6x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-1}
// \quad x^3 + 5x^2 + x + 2 &
\end{array}$$

Il polinomio $x^3 + 5x^2 + x + 2$, che così si ottiene, è il primo resto parziale. Si opera ora su questo come si è fatto prima sul dividendo, cioè si divide il suo primo termine x^3 per il primo termine x^2 del divisore; si ottiene così il quoziente x che sarà il secondo termine del polinomio quoziente e verrà scritto dopo il primo termine di detto polinomio, cioè dopo $2x^2$. Si moltiplica ora questo secondo termine del quoziente per il polinomio divisore $B(x)$ e si sottrae il prodotto ottenuto dal primo resto parziale; questa operazione viene eseguita scrivendo i termini del prodotto, con segno cambiato, sotto i termini simili del primo resto e sommandoli poi ad essi, come indicato qui sotto:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 2 & x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 2x^3 + 6x^2 & 2x^2 + x \\ \cline{1-1}
// \quad x^3 + 5x^2 + x + 2 & \\
\quad\;\; -x^3 - x^2 + 3x & \\ \cline{1-1}
\quad // \quad 4x^2 + 4x + 2 &
\end{array}$$

Il polinomio $4x^2 + 4x + 2$ che così si ottiene è il secondo resto parziale. Si procede ora, nell'esecuzione dell'operazione, sempre con lo stesso metodo finché si ottiene un resto parziale di grado inferiore a quello del divisore $B(x)$. Come si può vedere, dal prospetto di seguito riportato, nel caso in esame basterà applicare il suddetto procedimento ancora una sola volta.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 2 & x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 2x^3 + 6x^2 \qquad\quad & 2x^2 + x + 4 \\ \cline{1-1}
// \qquad x^3 + 5x^2 + x + 2 & \\
-x^3 - x^2 + 3x \quad\; & \\ \cline{1-1}
// \quad 4x^2 + 4x + 2 & \\
-4x^2 - 4x + 12 & \\ \cline{1-1}
// \quad // \quad 14 &
\end{array}
$$

A questo punto la divisione è finita. Il polinomio $2x^2 + x + 4$ è il quoziente della divisione e l'ultimo resto parziale, 14, è il polinomio resto.

Enunciamo ora la regola che abbiamo seguito nell'eseguire la precedente divisione.

Per dividere un polinomio $A(x)$ di grado n per un polinomio $B(x)$ di grado m, con $m \leqslant n$, si procede nel seguente modo:

1) si scrivono i polinomi $A(x)$ e $B(x)$ ordinati secondo le potenze decrescenti di x;

2) si divide il primo termine del dividendo $A(x)$ per il primo termine del divisore $B(x)$, ottenendo così il primo termine del polinomio quoziente $Q(x)$;

3) si moltiplica questo primo termine di $Q(x)$ per il polinomio divisore $B(x)$ e si sottrae il prodotto ottenuto da $A(x)$, ottenendo così il primo resto parziale (per rendere più agevole questa sottrazione conviene scrivere il detto prodotto, con i termini cambiati di segno, sotto il polinomio $A(x)$, quindi sommare questi due polinomi);

4) si divide il primo termine del resto parziale per il primo termine di $B(x)$, ottenendo così il secondo termine del quoziente $Q(x)$;

5) si moltiplica questo secondo termine di $Q(x)$ e si sottrae il prodotto ottenuto dal primo resto parziale, ottenendo così il secondo resto parziale (naturalmente anche questa operazione si agevola nel modo indicato al numero 3);

6) si prosegue nello stesso modo finché l'ultimo resto parziale ottenuto è di grado inferiore al grado del polinomio divisore. Se l'ultimo resto parziale è zero diremo che $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.

Se i polinomi dividendo e divisore non fossero funzioni di una sola variabile, ma di due o più variabili, si deve scegliere una di queste come lettera ordinatrice, cioè come lettera rispetto alla quale ordinare i polinomi; quindi si esegue la divisione secondo la regola enunciata.

Se si cambia la scelta della lettera ordinatrice cambiano i polinomi quoziente e resto. Solo se il polinomio resto è zero, cioè se il polinomio dividendo è divisibile per il polinomio divisore, il polinomio quoziente non dipende dalla scelta della lettera ordinatrice ed il resto è sempre zero.

7.8 Divisione di un polinomio per un binomio di grado 1. Regola di Ruffini.

Vogliamo ora enunciare una regola (detta di Ruffini) che ci permette di eseguire molto più rapidamente la divisione tra due polinomi nel caso particolare che il polinomio divisore sia di grado 1 e che il coefficiente del suo termine di primo grado sia 1, cioè nel caso che il divisore sia un binomio del tipo $x + a$, dove a rappresenta un qualsiasi numero relativo.

Per illustrare questa regola consideriamo la seguente divisione:

$$(2x^3 + 4x^2 - x + 5) : (x - 3).$$

Disponiamo, come indicato nel prospetto sotto riportato, i coefficienti del polinomio dividendo, ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x e scritto in forma completa, su una riga orizzontale e separiamo l'ultimo con un tratto verticale; riportiamo nell'angolo di sinistra, spostato verso il basso, il termine di grado zero del divisore, cambiato di segno:

	2	+4	−1	+5
3				

Trascriviamo poi (vedi prospetto sotto riportato) il primo coefficiente del dividendo, 2, sotto la linea orizzontale (esso sarà il primo coefficiente del polinomio quoziente); quindi moltiplichiamolo per il numero 3, posto nell'angolo di sinistra, e incolonniamo il risultato, + 6, con il secondo coefficiente del dividendo e sommiamolo ad esso, ottenendo + 10 (questo sarà il secondo coefficiente del polinomio quoziente):

	2	+ 4	− 1	+ 5
3		+ 6		
	2	+ 10		

Moltiplichiamo ora anche + 10 per 3 e incolonniamo il prodotto, + 30, con il terzo coefficiente del dividendo, − 1, e sommiamolo ad esso, ottenendo + 29 (questo sarà il terzo coefficiente del polinomio quoziente). Moltiplichiamo anche + 29 per 3, incolonniamo il prodotto, + 87, con l'ultimo coefficiente del dividendo, + 5, e sommiamolo ad esso, ottenendo + 92 (questo sarà il resto della divisione).

	2	+ 4	− 1	+ 5
3		+ 6	+ 30	+ 87
	2	+ 10	+ 29	+ 92

Possiamo ora scrivere il polinomio quoziente Q(x). Esso ha grado inferiore di una unità rispetto al grado del polinomio dividendo, essendo il divisore di primo grado; i suoi coefficienti sono ordinatamente: 2, + 10, + 29. Pertanto il polinomio Q(x) sarà: $2x^2 + 10x + 29$. Il resto è, come già abbiamo detto, + 92.

Generalizzando quanto detto sopra possiamo enunciare la seguente **regola di Ruffini:**

il quoziente tra un polinomio A(x), di grado n, ordinato secondo le potenze decrescenti di x e scritto in forma completa, ed il binomio B(x) = $x + a$, è un polinomio di grado $n - 1$, anch'esso ordinato rispetto alle potenze decrescenti di x. I coefficienti dei suoi singoli termini si trovano nel seguente modo: il primo coefficiente è uguale al primo coefficiente del dividendo; tutti gli altri si ottengono moltiplicando il precedente per $-a$ e aggiungendo al prodotto ottenuto il corrispondente coefficiente del dividendo di ugual posto. Il prodotto dell'ultimo coefficiente del quoziente per $-a$, aggiunto al termine di grado zero di A(x) dà il resto della divisione.

Per rendere più chiara la regola di Ruffini riportiamo qualche altro esempio di divisione eseguibile con essa.

Esempi

1) Eseguire la divisione:

$$(x^4 - 1 + 2x^2) : (x + 2).$$

Il polinomio dividendo, scritto in forma completa ed ordinato, è:

$$x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x - 1.$$

Procediamo ora all'esecuzione della divisione:

	1	+ 0	+ 2	+ 0	− 1
− 2		− 2	+ 4	− 12	+ 24
	1	− 2	+ 6	− 12	+ 23

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 12; \quad R = +23.$$

2) Eseguire la seguente divisione rispetto alla variabile x:

$$(ax - x^2 + 2a^2) : (x - 3a).$$

Il polinomio dividendo, scritto in forma completa e ordinato secondo le potenze decrescenti di x, è:

$$-x^2 + ax + 2a^2.$$

Quindi:

	− 1	+ a	+ $2a^2$
$3a$		− $3a$	− $6a^2$
	− 1	− $2a$	− $4a^2$

$$Q(x, a) = -x - 2a; \quad R = -4a^2.$$

Abbiamo finora trattato il problema della divisione di un polinomio per un binomio di grado 1 con coefficiente del termine di primo grado uguale a 1, cioè per un binomio del tipo $x + a$. Vogliamo ora generalizzare i nostri discorsi trattando anche il caso di divisori del tipo $bx + a$, cioè sempre di primo grado ma con coefficiente del termine di primo grado diverso da 1.

Prima però di affrontare questo problema ricordiamo una proprietà delle divisioni tra numeri, e precisamente esaminiamo cosa succede del quoziente e del resto di due numeri quando questi vengono divisi o moltiplicati per uno stesso numero.

Eseguiamo la divisione tra due qualsiasi numeri, per esempio tra 18 e 4, quindi tra 9 e 2 (cioè tra i numeri precedenti divisi entrambi per 2), quindi tra 54 e 12 (cioè tra i detti numeri moltiplicati entrambi per 3):

$$\begin{array}{ccc} 18 : 4 = 4 & \quad 9 : 2 = 4 & \quad 54 : 12 = 4. \\ 2 & 1 & 6 \end{array}$$

Come questo esempio ci mostra, vediamo che quando il dividendo ed il divisore vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero il quoziente rimane inalterato, mentre il resto viene moltiplicato o diviso per quel numero (*proprietà invariantiva della divisione*).

La stessa proprietà vale naturalmente anche per i polinomi.

Dovendo dividere un polinomio $A(x)$ per un binomio $bx + a$ (con $b \neq 0$) potremo allora dividere sia il dividendo che il divisore per il numero b, ottenendo così per divisore il binomio $x + a/b$ che è del tipo già trattato precedentemente. Eseguendo poi la divisione tra i polinomi divisi per b otterremo come quoziente il vero quoziente tra $A(x)$ e $bx + a$ ed otterremo un resto diviso per b; per avere il resto desiderato basterà moltiplicare per b quello ottenuto.

Eseguiamo, per esempio, la seguente divisione:

$$(2x^3 - 4x^2 + 3x - 1) : (2x + 1).$$

Dividendo entrambi i polinomi per 2 otterremo:

$$\left(x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Quindi:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & +\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & +\frac{5}{4} & -\frac{11}{8} \\ \hline & 1 & -\frac{5}{2} & +\frac{11}{4} & -\frac{15}{8} \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{11}{4} \qquad R = -\frac{15}{8} \cdot 2 = -\frac{15}{4}.$$

Concludiamo allora con la seguente regola:

per dividere un polinomio A (x) per un binomio $bx + a$ (con $b \neq 0$) si dividono i coefficienti di A (x) e del binomio per b, quindi si effettua la divisione con la regola di Ruffini; il quoziente ottenuto è quello voluto, mentre il resto si ottiene moltiplicando quello ottenuto per b.

7.9 Regola del resto di Ruffini

La **regola del resto di Ruffini** ci permette di calcolare il resto di una divisione tra polinomi, senza eseguire la divisione stessa, nel caso che il divisore sia del tipo $x + a$. Estenderemo poi la suddetta regola al caso di divisori del tipo $bx + a$ (con $b \neq 0$).

La regola del resto ha una notevole importanza nel calcolo letterale perché permette di stabilire rapidamente se un polinomio è o non è divisibile per un binomio di primo grado.

Per rendere più chiaro ciò che diremo appoggiamo, per il momento, la nostra attenzione su un caso particolare.

Sia, per esempio, il polinomio $A(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$ da dividere per il binomio $B(x) = x - 2$. Indichiamo con $Q(x)$ il polinomio quoziente e con R il resto (ricordiamo che il resto non contiene la variabile x perché deve essere di grado zero essendo il divisore di grado 1).

Per la nota relazione che intercorre tra dividendo, divisore, quoziente e resto, possiamo affermare che il polinomio $A(x)$ ed il polinomio $(x - 2) \cdot Q(x) + R$ sono uguali. Se i suddetti polinomi sono uguali essi assumeranno valori uguali per qualsiasi valore attribuito alla variabile x.

Attribuiamo alla x il valore 2; il polinomio $A(x)$ assumerà il valore:

$$A(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 16 - 12 + 2 = 4$$

mentre il secondo polinomio assumerà il valore:

$$(2 - 2) \cdot Q(2) + R = 0 \cdot Q(2) + R = R.$$

Poiché deve essere, per la ricordata identità tra i due polinomi, $A(2) = R$ avremo che il resto della divisione è 4.

Possiamo quindi dire che per calcolare il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $x - 2$ basta calcolare il valore che il polinomio $A(x)$ assume attribuendo ad x il valore 2, termine di grado 0 del divisore, cambiato di segno.

Rifacciamo ora tutto il ragionamento per un generico polinomio dividendo $A(x)$ e per un generico divisore $x + a$. Indichiamo ancora con $Q(x)$ il quoziente della divisione e con R il resto. Ancora possiamo dire che il polinomio $A(x)$ ed il polinomio $(x + a) \cdot Q(x) + R$, dovendo essere uguali, assumeranno valori uguali per ogni valore attribuito alla variabile x.

Attribuiamo alla variabile x il valore $-a$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} &A(-a) = (-a + a) \cdot Q(-a) + R && \text{e cioè} \\ &A(-a) = 0 \cdot Q(-a) + R && \text{da cui} \\ &A(-a) = R. \end{aligned}$$

Concludiamo ora enunciando la **regola del resto di Ruffini**:

il resto della divisione tra il polinomio $A(x)$ ed il binomio $x + a$ è il valore che assume il

polinomio A(x) attribuendo alla variabile x il valore $-a$. La condizione necessaria e sufficiente perché il polinomio A(x) sia divisibile per il binomio $x + a$ è che sia $A(-a) = 0$.

Esempi

1) Calcolare il resto della divisione tra il polinomio $A(x) = 2x^3 - 3x + 1$ ed il binomio $x + 3$.

Per la regola del resto avremo:

$$R = A(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 1 = -54 + 9 + 1 = -44.$$

2) Senza eseguire la divisione dire se il polinomio $A(x) = x^2 - 3x + 2$ è divisibile per il binomio $x - 1$.

Essendo:

$$R = A(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

il polinomio dato è divisibile per $x - 1$.

3) Calcolare il resto della divisione tra il polinomio $A(x, a) = x^4 - 3ax^3 + 2a^4$ ed il binomio $x + a$, considerando x quale lettera ordinatrice.

Avremo:

$$R = (-a)^4 - 3a(-a)^3 + 2a^4 = a^4 - 3a(-a^3) + 2a^4 = a^4 + 3a^4 + 2a^4 = 6a^4.$$

7.10 Scomposizione di un polinomio in fattori

Ricordiamo che scomporre un numero intero in fattori significa uguagliarlo al prodotto di altri numeri interi. Per esempio:

$$15 = 3 \cdot 5; \quad 18 = 2 \cdot 3^2; \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2; \quad \text{ecc.}$$

Analogamente, scomporre un polinomio intero in fattori significa uguagliarlo al prodotto di altri polinomi interi.

Consideriamo, per esempio, il polinomio $a^2 + ab - 2a$. Esso può venir uguagliato al prodotto del monomio a per il polinomio $a + b - 2$.

Scriveremo quindi:

$$a^2 + ab - 2a = a \cdot (a + b - 2).$$

Così pure il polinomio $x^5 + 4x^4y$ può venir uguagliato al prodotto del monomio x^4 per il polinomio $x + 4y$; scriveremo quindi:

$$x^5 + 4x^4y = x^4 \cdot (x + 4y).$$

Chiamiamo **irriducibile** *un polinomio intero che non può venir scomposto.*

La scomposizione dei polinomi è un'operazione piuttosto difficile perché non esiste una ben precisa regola che permetta di effettuarla. Per imparare ad eseguirla correttamente e con una certa speditezza sarà bene tenere presenti tutte le operazioni tra polinomi e le relative proprietà imparate nel precedente capitolo.