Applicazione dell'algebra alla geometria

Negli esercizi relativi ad alcuni dei capitoli precedenti già si incontrano problemi di applicazione dell'algebra alla geometria, ma mentre per la risoluzione di quelli sono sufficienti semplici nozioni di geometria, per la risoluzione dei problemi qui proposti è necessaria una più vasta e approfondita conoscenza di questa materia.

Problemi di 1° grado o ad essi riducibili:

PROBLEMI DI GEOMETRIA PIANA

1 È dato un triangolo ABC in cui i lati AB, BC e CA sono direttamente proporzionali ai numeri 6, 3 e 4. Il perimetro del triangolo misura 390 cm. Sul lato AB si prenda un punto P tale che $AP = \frac{2}{3} AB$ e da esso si mandi la parallela ad AC che intersechi il lato BC in Q. Trovare i lati del triangolo BPQ.

[$\overline{PB} = 60$ cm; $\overline{BQ} = 30$ cm; $\overline{QP} = 40$ cm]

2 In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, il perimetro misura cm 63 e la base è $\frac{5}{8}$ del lato. Trovare sulla base AB un punto P tale che il segmento AP sia la metà del segmento PB; si mandino poi da P la parallela ad AC che intersechi il lato CB in R e, sempre da P, la parallela a BC che intersechi il lato AC in S. Trovare il perimetro del parallelogrammo $PSCR$.

[perimetro = 48 cm]

3 In un trapezio isoscele la base maggiore, la base minore e l'altezza misurano rispettivamente 28 cm, 12 cm e 15 cm.
Trovare il perimetro del triangolo avente per vertici gli estremi della base maggiore e il punto d'incontro dei prolungamenti dei lati non paralleli.

[perimetro = 87,5 cm]

4 In un trapezio la base maggiore misura 24 cm, la base minore 10 cm ed i lati non paralleli misurano l'uno 10 cm e l'altro $8\sqrt{2}$ cm.
Trovare il perimetro del triangolo avente per vertici gli estremi della base minore ed il punto d'intersezione dei prolungamenti dei lati non paralleli.

$$\left[\text{perimetro} = \frac{40}{7}(3 + \sqrt{2})\ \text{cm}\right]$$

5 I lati di un triangolo misurano $4a$, $5a$ e $7a$. Trovare le misure dei lati del triangolo che si ottiene mandando da ogni vertice del triangolo dato la retta parallela al lato opposto.

[perimetro = $32a$]

6 È data una circonferenza il cui diametro AB misura $25a$. Dal punto H di AB che divide AB in parti il rapporto delle quali è $\frac{9}{16}$, mandare la corda PQ perpendicolare al diametro stesso. Trovare il perimetro e l'area della superficie del quadrilatero $APBQ$ in funzione di a e rappresentare graficamente in un piano cartesiano il loro andamento al variare di a. [perimetro = $70a$; area = $300a^2$]

7 In un triangolo ABC, rettangolo in B, il perimetro misura 84 cm ed i cateti stanno tra loro nel rapporto $\frac{3}{4}$. Trovare l'area della superficie del triangolo.
Si mandi da A, vertice dell'angolo acuto minore, la perpendicolare all'ipotenusa AC che intersechi la retta CB in P. Trovare il perimetro del triangolo APC.
[area = 294 cm^2; perimetro = 140 cm]

8 Dato un segmento di lunghezza $12a$ dividerlo in due parti in modo che il rapporto tra le aree delle superfici dei quadrati su esse costruiti sia 9. Trovare quindi la misura della diagonale del rettangolo avente per lati le due suddette parti del segmento.
[diagonale = $3a\sqrt{10}$]

9 In un semicerchio di diametro $AB = 2r$ è inscritto il trapezio $ABCD$. Trovare l'area della sua superficie sapendo che la base minore misura $\frac{2}{3}r$. $\left[\text{area} = \frac{8}{9}r^2\sqrt{2}\right]$

10 L'area della superficie di un quadrato è di 12 cm^2. A partire da ciascun vertice, su ogni lato e nello stesso senso, si prenda un segmento uguale ad $\frac{1}{4}$ del lato stesso. Trovare perimetro ed area della superficie del quadrilatero che si ottiene congiungendo i quattro punti, dopo aver dimostrato che è anch'esso un quadrato.
[perimetro = $2\sqrt{30}$ cm; area = 7,5 cm^2]

11 Le dimensioni di un rettangolo sono l'una i $\frac{4}{3}$ dell'altra e la diagonale misura 25 cm. A partire da ciascun vertice, su ogni lato e nello stesso senso, si prenda un segmento uguale ai $\frac{2}{5}$ del lato stesso. Trovare perimetro ed area della superficie del quadrilatero che si ottiene congiungendo i quattro punti, dopo aver dimostrato che è un parallelogrammo. Trovare inoltre le due altezze del detto parallelogrammo.

$$\left[\text{perimetro} = (12\sqrt{5} + 2\sqrt{145})\ \text{cm};\quad \text{area} = 156\ \text{cm}^2;\ h_1 = 26\frac{\sqrt{5}}{5}\ \text{cm};\quad h_2 = 156\frac{\sqrt{145}}{145}\ \text{cm}\right]$$

12 In un triangolo ABC, rettangolo in A, il cateto AB è i $\frac{4}{3}$ del cateto AC ed il perimetro misura 36 cm. Dal punto P, situato sull'ipotenusa e distante 5 cm dal vertice B, si mandi la perpendicolare all'ipotenusa stessa che intersechi il cateto AB nel punto H. Trovare perimetro ed area della superficie del quadrilatero $ACPH$.
[perimetro = 28,50 cm; area = 44,625 cm^2]

13 In un triangolo ABC, rettangolo in A, l'area della superficie è di 486 dm^2 ed un cateto è i $\frac{3}{4}$ dell'altro. La perpendicolare all'ipotenusa mandata dal vertice B dell'angolo acuto maggiore interseca il prolungamento del cateto maggiore nel punto P. Trovare il perimetro del triangolo PBC. [perimetro = 135 dm]

14 In un triangolo ABC rettangolo in A, il perimetro è di cm 80 ed un cateto è gli $\frac{8}{15}$ dell'altro. A quale distanza dal vertice A si deve mandare una retta parallela all'ipotenusa affinchè la corda MN su essa staccata dai cateti sia lunga 10 cm?

$$\left[\text{distanza} = \frac{1200}{289} \text{ cm}\right]$$

15 Il perimetro di un triangolo ABC, isoscele sulla base AC, misura $150a$ e la sua base è i $\frac{16}{15}$ dell'altezza ad essa relativa. Si trovi su AC un punto P, in modo che l'area della superficie del quadrilatero $APQB$, essendo Q il punto di intersezione del lato BC con la parallela mandata da P al lato AB, sia $180a^2$. [$\overline{PC} = 8a\sqrt{30}$]

16 L'area della superficie di un triangolo isoscele è $588a^2$. Trovare il raggio del cerchio in esso inscritto sapendo che la base è i $\frac{6}{5}$ del lato. $\left[\text{raggio} = \frac{21}{2}a\right]$

17 In un triangolo isoscele la base è i $\frac{3}{2}$ dell'altezza ed il raggio del cerchio in esso inscritto misura cm 6. Trovare il perimetro del triangolo. [perimetro = 64 cm]

18 Sia data una circonferenza di centro O e raggio r ed un punto P la cui distanza dal centro è $\frac{3}{2}$ del raggio. Si tracci la retta PO e siano A e B le intersezioni della detta retta con la circonferenza ($PA < PB$). Si trovi l'area della superficie del quadrilatero $ATHB$, essendo T il punto di contatto della circonferenza con una tangente mandata da P ed H la proiezione ortogonale di B su tale tangente.

$$\left[\text{area} = \frac{11}{18} r^2 \sqrt{5}\right]$$

19 Trovare il perimetro del quadrilatero $ATHB$ dell'esercizio precedente.

$$\left[\text{perimetro} = \frac{r}{3}(\sqrt{6} + \sqrt{5} + 11)\right]$$

20 Sia P un punto esterno ad una circonferenza di centro O; siano A e B i punti d'intersezione della retta PO con la circonferenza ($PA < PB$) e sia T il punto di contatto di una delle tangenti alla circonferenza uscenti da P. Trovare il raggio della circonferenza e le aree delle superfici dei triangoli PTA e PTB, sapendo che $\overline{PT} = 24a$ e $\overline{PA} = 12a$.

$$\left[\text{raggio} = 18a; \quad \frac{432}{5}a^2; \quad \frac{1728}{5}a^2\right]$$

21 In un trapezio isoscele $ABCD$, la cui base maggiore AB è doppia della minore mentre quest'ultima supera di 11 cm i lati non paralleli, il perimetro misura 108 cm. Trovare le distanze dei vertici A e D dal lato BC. Trovare inoltre il perimetro del triangolo ABO, essendo O il punto d'incontro dei prolungamenti dei lati non paralleli.

$$\left[\frac{104\sqrt{14}}{15}\text{ cm};\quad \frac{52\sqrt{14}}{15}\text{ cm};\quad 112\text{ cm}\right]$$

22 In un triangolo isoscele, il cui perimetro misura $250a$, il lato è i $\frac{13}{24}$ della base. A quale distanza dal vertice dobbiamo mandare una retta parallela alla base affinchè l'area della superficie del trapezio avente per vertici gli estremi della base del triangolo e le intersezioni della suddetta retta coi lati sia i $\frac{3}{4}$ di quella del triangolo stesso?

$$\left[\text{distanza} = \frac{25}{2}a\right]$$

23 In un triangolo isoscele, l'area della cui superficie è $480a^2$, la base è i $\frac{16}{15}$ dell'altezza. A quale distanza dal vertice si deve condurre una retta parallela alla base affinchè il rapporto delle aree del triangolo e del trapezio in cui il triangolo dato viene diviso sia $\frac{1}{8}$?

[distanza $= 10a$]

24 L'ipotenusa di un triangolo ABC, rettangolo in A, misura $39a$ mentre il rapporto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $\frac{144}{25}$. Dal punto H, piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, si mandino le perpendicolari ai cateti che li intersechino rispettivamente in P e Q. Trovare il lato del quadrato equivalente al rettangolo $AQHP$.

$$\left[\text{lato} = \frac{360\sqrt{15}}{169}a\right]$$

25 L'ipotenusa del triangolo ABC, rettangolo in A, misura $25a$ mentre il rapporto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è $\frac{16}{9}$. Dal punto H, piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, si mandi la parallela al cateto minore AB che intersechi il cateto maggiore AC in K; quindi si mandi da K la parallela ad AH che intersechi l'ipotenusa in L. Trovare l'area del triangolo ABC, il rapporto di similitudine tra i triangoli ABC e KLC, il rapporto tra le aree dei suddetti triangoli.

$$\left[\text{area} = 150a^2;\quad \text{rapporto sim.} = \left(\frac{5}{4}\right)^3;\quad \text{rapporto aree} = \left(\frac{5}{4}\right)^6\right]$$

26 In un trapezio isoscele la base maggiore misura a, la base minore misura b e l'altezza è uguale alla differenza delle basi. Trovare il perimetro e l'area della superficie del trapezio. Trovare poi per quale valore di b i lati non paralleli sono uguali alla base minore e determinare il valore che in tal caso assumono perimetro ed area della superficie.

$$\left[\text{perimetro} = a\,(1 + \sqrt{5}) + b\,(1 - \sqrt{5});\quad \text{area} = \frac{a^2 - b^2}{2};\ b = a\,(5 - 2\sqrt{5});\right.$$
$$\left.\text{perimetro} = 2a\,(8 - 3\sqrt{5});\quad \text{area} = 2a^2\,(5\sqrt{5} - 11)\right]$$

27 In un trapezio isoscele le diagonali sono perpendicolari ai lati non paralleli; la somma delle basi misura a e la loro differenza misura b. Trovare il valore di b affinchè il trapezio sia equivalente ad un quadrato di lato $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. [$b = 4a$]

28 Un trapezio isoscele è circoscritto ad una circonferenza di raggio $10a$ e le sue basi sono l'una i $\frac{25}{4}$ dell'altra. Trovare il perimetro del trapezio. Trovare poi il valore che deve assumere a affinchè l'area della superficie del trapezio sia 580 cm^2.
[perimetro = $116a$; a = 1 cm]

29 In un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio una base è i $\frac{9}{16}$ dell'altra e l'area della superficie è $480a^2$. Trovare il perimetro del trapezio e l'area della superficie del quadrilatero che si ottiene congiungendo i quattro punti di contatto del trapezio con la circonferenza. $\left[\text{perimetro} = 40a\sqrt{5};\quad \text{area} = \left(\frac{24}{25}\right)^2 \cdot 480a^2\right]$

30 In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{4}{3}$ dell'altro e l'altezza relativa all'ipotenusa misura $12a$. Trovare la lunghezza della bisettrice dell'angolo acuto minore.
$\left[\frac{20a\sqrt{10}}{3}\right]$

31 Dimostrare che le bisettrici degli angoli di un rettangolo formano un quadrato. Sapendo che in un rettangolo una dimensione è i $\frac{3}{4}$ dell'altra e che l'area della superficie è $120a^2$ trovare, in funzione di a, l'area del quadrato formato dalle bisettrici dei suoi angoli e rappresentare graficamente in un piano cartesiano il suo andamento al variare di a. [area = $5a^2$]

32 In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa misura 14,4 cm e le due parti in cui essa divide l'ipotenusa stessa sono proporzionali ai numeri 16 e 9. Trovare le misure della mediana e della bisettrice uscenti dal vertice dell'angolo retto.

$$\left[\text{mediana} = 15\ \text{cm};\quad \text{bisettrice} = \frac{72\sqrt{2}}{7}\ \text{cm}\right]$$

33 L'area della superficie del triangolo ABC, rettangolo in B, è $240a^2$. La bisettrice dell'angolo di vertice C incontra il cateto opposto nel punto L che divide il cateto stesso in due parti il cui rapporto è $\frac{8}{17}$. Da L si mandi la perpendicolare all'ipotenusa che la incontri in H. Trovare l'area del triangolo LHA. $\left[\text{area} = \frac{432}{5}\, a^2\right]$

34 In un triangolo due lati misurano cm 18 e cm 42. Trovare il rapporto tra le aree delle superfici dei triangoli in cui il triangolo dato rimane diviso dalla bisettrice dell'angolo formato dei due suddetti lati. $\left[\text{rapporto} = \frac{3}{7}\right]$

35 In un cerchio, l'area della cui superficie è $200\pi a^2$, una corda AB divide il diametro ad essa perpendicolare in due parti, una tripla dell'altra. Sia P il punto d'intersezione delle tangenti alla circonferenza nei punti A e B. Trovare area della superficie e perimetro del triangolo APB e stabilire che tipo di triangolo è.
[perimetro = $30a\sqrt{6}$; area = $150a^2\sqrt{3}$]

36 In un cerchio, la cui circonferenza misura 28π cm, una corda AB divide il diametro RS ad essa perpendicolare in due parti il cui rapporto è $\frac{2}{5}$. Detto P il punto d'incontro delle tangenti in A ed in B, trovare l'area della superficie dei quadrilateri $PASB$ e $PARB$. $\left[\frac{224\sqrt{10}}{3}\ \text{cm}^2;\quad \frac{560\sqrt{10}}{3}\ \text{cm}^2\right]$

37 In un rettangolo $ABCD$ la somma della metà di AB e di un quinto di AD misura 8 cm, mentre la differenza tra il doppio di AB e la metà di AD misura 19 cm. Trovare sul lato DC un punto P tale che detto Q il punto d'incontro della parallela a DB condotta da P con il lato CB, l'area della superficie del pentagono $DPQBA$ sia i $\frac{5}{6}$ di quella del rettangolo. $[\overline{PC} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}]$

38 In un rettangolo $ABCD$ il rapporto tra AB e BC è $\frac{8}{5}$. Si mandi la bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$ che intersechi il lato AB in E e la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ che intersechi il lato DC in F. Trovare il rapporto tra l'area della superficie del rettangolo e quella del parallelogrammo $AECF$. $\left[\text{rapporto} = \frac{8}{3}\right]$

39 Trovare la misura del lato AB del rettangolo dell'esercizio precedente sapendo che l'area della superficie del parallelogrammo $AECF$ è di 0,15 m^2. $[AB = 8\ \text{dm}]$

40 In un triangolo ABC, rettangolo in B, il lato AB misura $21a$ mentre la sua proiezione sull'ipotenusa sta alla proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa come 9 sta a 16. Costruire sul cateto AB il quadrato $ABRS$ e sul cateto BC il quadrato $BCPQ$ (i quadrati siano entrambi esterni al triangolo). Dimostrare che i punti S, B e P sono allineati e calcolare la misura del segmento SP. $[\overline{SP} = 49a\sqrt{2}]$

41 Dimostrare che il quadrilatero $ACQR$ dell'esercizio precedente è un trapezio isoscele; calcolare quindi l'area della sua superficie e l'altezza.

$$\left[\text{area} = \frac{2401}{2}\,a^2; \quad \text{altezza} = \frac{49a\sqrt{2}}{2}\right]$$

42 In un trapezio isoscele l'area della superficie è $264a^2$, l'altezza misura $12a$ e le basi sono l'una i $\frac{7}{4}$ dell'altra. Trovare il perimetro del trapezio e le parti in cui l'altezza è divisa dal punto d'incontro delle diagonali.

$$\left[\text{perimetro} = 4a\,(11 + 3\sqrt{5}); \quad \frac{48}{11}\,a; \quad \frac{84}{11}\,a\right]$$

43 Riferendosi al trapezio dell'esercizio precedente, trovare la lunghezza della corda LM intercettata dai lati non paralleli sulla retta parallela alle basi e passante per il punto d'incontro delle diagonali. I due trapezi in cui tale retta divide il trapezio dato sono simili? $\left[\overline{LM} = \frac{224}{11}\,a; \quad \text{no. Perchè?}\right]$

44 Nel quadrilatero $ABCD$ la diagonale AC è perpendicolare alla diagonale BD e la divide in due parti uguali. Dimostrare che il quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza. Trovare quindi la misura dei suoi lati sapendo che il perimetro misura 28 cm e che $\frac{1}{4}\,\overline{CD} + \frac{3}{2}\,\overline{AD} = 11$ cm $[\overline{CD} = 8 \text{ cm}; \quad \overline{AD} = 6 \text{ cm}]$

45 Dimostrare che il raggio del cerchio inscritto in un poligono è uguale all'area della superficie del poligono stesso diviso il suo semiperimetro. Trovare poi la misura del raggio del cerchio inscritto nel quadrilatero dell'esercizio precedente sapendo che gli angoli in B ed in D sono retti. $\left[\text{raggio} = \frac{24}{7}\text{ cm}\right]$

46 Sul segmento AB lungo $26a$ si prenda un punto P che divida il segmento stesso in parti il cui rapporto è $\frac{4}{9}$. Da P si mandi la perpendicolare ad AB e su tale perpendicolare si prenda un segmento PC lungo $12a$. Dimostrare che C è sulla circonferenza di diametro AB. Si tracci la retta tangente a questa circonferenza in C e si proiettino su essa ortogonalmente A e B rispettivamente in H e K. Trovare l'area del quadrilatero $AHKB$.
$[\text{area} = 312\,a^2]$

47 In una circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$ si prenda una corda AC uguale al raggio. Si mandi per C la tangente alla circonferenza e si proiettino su essa i punti A e B rispettivamente in H e K. Dimostrare che il punto R, piede della perpendicolare mandata da C ad AB, ed i punti H e K stanno tutti su una circonferenza di centro C e che HR è uguale al raggio di questa circonferenza. Trovare poi l'area del triangolo HRK. $\left[\text{area} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{8}\right]$

48 Siano OA e OB due segmenti uguali, di misura a, perpendicolari tra loro. Si prolunghino tali segmenti, dalla parte di O, di due segmenti OC e OD uguali tra loro, di misura b. Dimostrare che il quadrilatero $ABCD$ è un trapezio isoscele e trovare per quale valore di b esso è equivalente ad un quadrato di lato $3a$. [$b = a\,(3\sqrt{2} - 1)$]

49 È data una circonferenza di centro O e diametro AB uguale a $2r$. Sulla perpendicolare ad AB in A si prenda un segmento AC uguale al diametro; da C si mandi l'ulteriore tangente alla circonferenza e sia T il punto di contatto. Trovare il perimetro del triangolo CTB. $\left[\text{perimetro} = 2r\left(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right]$

50 Trovare l'area della superficie del triangolo CTB dell'esercizio precedente. Qual è il grafico che rappresenta in un piano cartesiano l'andamento di tale area al variare di r?

$\left[\text{area} = \frac{2r^2}{5}\right]$

51 Un trapezio $ABCD$, rettangolo in A e in D, è circoscritto ad un cerchio. Trovare le misure del raggio del cerchio inscritto e delle due basi del trapezio sapendo che il perimetro del trapezio misura $100a$ e l'area della sua superficie è $600a^2$.

[raggio $= 12a$; $\overline{AB} = 30a$; $\overline{CD} = 20a$]

52 Nel trapezio dell'esercizio precedente si prolunghino i lati non paralleli e sia O il loro punto d'incontro. Trovare l'area della superficie del triangolo CDO e le misure delle distanze AH e DK dei punti A e D dalla retta BC. Trovare quindi l'area del quadrilatero $AHKD$. $\left[\text{area} = 480a^2;\ \overline{AH} = \frac{360}{13}\,a;\ \overline{DK} = \frac{240}{13}\,a;\ \text{area} = \frac{86400}{169}\,a^2\right]$

53 In un triangolo il perimetro misura $168a$ ed i lati sono proporzionali ai numeri 8, 9 e 11. Trovare il perimetro del triangolo e del trapezio in cui il triangolo dato viene diviso dalla retta parallela al lato maggiore del triangolo e passante per il suo baricentro.

[perimetro triangolo $= 112a$; perimetro trapezio $= 144a$]

54 In un triangolo si mandi la parallela ad un suo lato passante per il suo baricentro. Trovare il rapporto tra le aree del triangolo e del trapezio in cui il triangolo dato rimane diviso dalla suddetta retta. $\left[\text{rapporto} = \frac{4}{5}\right]$

55 In una semicirconferenza di diametro AD e centro O si prenda una corda AB uguale al raggio; quindi si mandi da B la parallela al diametro AD e si indichi con C l'ulteriore intersezione di questa retta con la semicirconferenza. Sapendo che l'area della superficie del quadrilatero $ABCD$ è $\sqrt{3}$ cm^2 trovare la misura del raggio della semicirconferenza. Trovare quindi l'area della superficie del quadrilatero $OBPC$, essendo P il punto d'intersezione delle due tangenti alla semicirconferenza in B e in C.

$\left[\text{raggio} = 2\,\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{cm};\ \text{area} = 4\,\frac{\sqrt{3}}{9}\ \text{cm}^2\right]$

56 Dimostrare che il quadrilatero *OBPC* dell'esercizio precedente è inscrittibile e circoscrittibile e trovare le misure dei raggi delle circonferenze circoscritta e inscritta.

$$\left[R = 0,\bar{6}\ \text{cm}; \quad r = \frac{(3-\sqrt{3})}{3}\ \text{cm}\right]$$

57 In un triangolo *ABC*, isoscele sulla base *AB*, il perimetro misura 108 cm. Sapendo che la circonferenza inscritta tocca il lato *AC* in un punto *M* e che 5 *CM* = 8 *MA*, trovare i lati del triangolo ed il raggio del cerchio in esso inscritto.

[$\overline{AB} = 30$ cm; $\overline{AC} = 39$ cm; raggio = 10 cm]

58 In un cerchio il cui diametro misura $65a$ inscrivere un rettangolo *ABCD*, in modo che $\frac{1}{3} AB = \frac{4}{5} BC$. Trovare il perimetro di un secondo rettangolo simile al primo e avente l'area della superficie di $100a^2$.

$$\left[\text{perimetro} = 34a\,\frac{\sqrt{15}}{3}\right]$$

59 In un cerchio il cui diametro misura $39a$ è inscritto un rettangolo le cui dimensioni stanno tra loro nel rapporto $\frac{5}{12}$. Trovare il perimetro e l'area della superficie del quadrilatero che si ottiene tracciando le quattro rette tangenti alla circonferenza nei punti che sono vertici del rettangolo. Di che natura è il suddetto quadrilatero?

[perimetro = $219,7a$; area = $2142,075a^2$]

60 In un rombo, il cui perimetro misura $250a$ e le cui diagonali sono l'una i $\frac{3}{4}$ dell'altra, è inscritto un cerchio. Trovare il perimetro del quadrilatero che ha per vertici i quattro punti di contatto tra il rombo e la circonferenza. [perimetro = $168a$]

61 In un trapezio isoscele la base maggiore misura 60 cm e la base minore 24 cm; gli angoli adiacenti alla base maggiore sono di 30°. Trovare il perimetro e l'area della superficie del trapezio. [perimetro = $12\,(7 + 2\sqrt{3})$ cm; area = $252\sqrt{3}$ cm^2]

62 In un trapezio isoscele avente gli angoli acuti di 60° la base maggiore misura $4a$ ed i lati non paralleli misurano a. Trovare perimetro ed area della superficie del trapezio.

$$\left[\text{perimetro} = 9a; \quad \text{area} = \frac{7}{4}\,a^2\sqrt{3}\right]$$

63 Il perimetro di un triangolo isoscele avente l'angolo al vertice di 120° misura 60 cm. Trovare l'area della superficie del triangolo. [area = $900\,(7\sqrt{3} - 12)$ cm^2]

64 L'area della superficie di un triangolo isoscele avente l'angolo al vertice di 120° è di cm^2 $12\sqrt{3}$. Trovare il perimetro del triangolo. [perimetro = $4\,(3 + 2\sqrt{3})$ cm]

65 In un trapezio isoscele *ABCD* avente gli angoli acuti di 45° la base minore *CD* misura 13 cm ed il perimetro misura $(12\sqrt{2} + 38)$ cm. Trovare perimetro ed area della superficie del triangolo *ABO*, essendo *O* il punto d'incontro dei prolungamenti dei lati non paralleli del trapezio. [perimetro = $25\,(1 + \sqrt{2})$ cm; area = 156,25 cm^2]

66 Nel trapezio isoscele $ABCD$ avente gli angoli acuti di 60° la base **minore** CD è $\frac{1}{3}$ della base maggiore AB e l'area della superficie è di $288\sqrt{3}$ dm^2. Trovare perimetro ed area della superficie del triangolo ABP, essendo P il punto di incontro dei prolungamenti dei lati non paralleli del trapezio. Trovare inoltre perimetro ed area della superficie del quadrilatero $BCDH$, essendo H il piede della perpendicolare mandata da C alla base AB.
[perimetro triangolo = 108 dm; area triangolo = $324\sqrt{3}$ dm^2;
perimetro quadrilatero = 72 dm; area quadrilatero = $144\sqrt{3}$ dm^2]

67 In un trapezio gli angoli adiacenti alla base maggiore sono di 60° l'uno e di 45° l'altro, il perimetro è di $12(4+\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm e l'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base minore. Trovare il perimetro del triangolo avente per vertici gli estremi della base minore ed il punto d'incontro dei prolungamenti dei lati non paralleli.
[perimetro = $9(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6})$ cm]

68 In un trapezio isoscele $ABCD$ gli angoli acuti sono di 30°, la base minore CD è uguale ai lati non paralleli ed il perimetro è di $24(4+\sqrt{3})$ cm. Trovare l'area della superficie del trapezio e la distanza del vertice B dalla retta AD.
[area = $144(2+\sqrt{3})$ cm^2; distanza = $12(1+\sqrt{3})$ cm]

69 In un triangolo gli angoli sono proporzionali ai numeri 3, 4, 5 ed il perimetro misura $(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})\,a$. Trovare l'area della superficie del triangolo e le misure delle tre altezze. $\left[\text{area} = a^2\,\frac{3+\sqrt{3}}{3};\quad h_1 = a\sqrt{2};\quad h_2 = a\,\frac{3+\sqrt{3}}{3};\quad h_3 = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)\right]$

70 In un trapezio $ABCD$ l'angolo in A è ampio 45°, l'angolo in B è ampio 60° e la base minore CD è i $\frac{5}{3}$ dell'altezza. Sapendo che il perimetro del trapezio è $4(13+3\sqrt{3}+3\sqrt{2})$ cm, trovare l'area. Trovare inoltre la distanza del punto A dalla retta BC e la distanza del punto B dalla retta AD.
[area = $24(13+\sqrt{3})$ cm^2, prima distanza = $2(8\sqrt{3}+3)$ cm,
seconda distanza = $2(8\sqrt{2}+\sqrt{6})$ cm]

71 Nel triangolo rettangolo ABC il cateto minore AB ed il cateto maggiore BC sono proporzionali ai numeri 3 e 4 ed il perimetro è $240a$. Da M, punto medio di AB, si conduca la perpendicolare all'ipotenusa e sia H il punto di intersezione con questa; da H si conduca la perpendicolare a BC e sia K il punto di intersezione. Determinare perimetro ed area della superficie del quadrilatero $MHKB$.
[perimetro = $117{,}6a$, area = $570{,}24a^2$]

72 Un trapezio isoscele è circoscritto ad un cerchio di raggio 8 cm. Sapendo che la base maggiore misura 32 cm trovare perimetro ed area della superficie del trapezio. Determinare poi il perimetro del triangolo avente per vertici gli estremi della base minore del trapezio ed il punto d'incontro dei prolungamenti dei suoi lati non paralleli.
[perimetro = 80 cm, area = 320 cm^2, perimetro = $21{,}\bar{3}$ cm]

73 L'area della superficie di un trianglo ABC isoscele sulla base AB e avente l'angolo al vertice di 120° è $2a^2 \sqrt{3}$.
Trovare il raggio della circonferenza circoscritta ed il raggio della circonferenza inscritta al triangolo. [$R = 2a \sqrt{2}$; $r = a (2 \sqrt{6} - 3 \sqrt{2})$]

74 Nel triangolo dell'esercizio precedente trovare l'altezza relativa al lato; trovare inoltre sul lato AC un punto P, tale che l'area della superficie del triangolo PAB sia $\frac{3}{5}$ di quella del triangolo ABC. $\left[\text{altezza} = a \sqrt{6};\quad \overline{AP} = \frac{6a \sqrt{2}}{5}\right]$

75 In un trapezio isoscele gli angoli acuti sono di 60° e le diagonali sono tra loro perpendicolari. Trovare i lati e l'area della superficie del trapezio sapendo che la base maggiore misura $2a$. [base $= 2a (2 - \sqrt{3})$; lato $= 2a (\sqrt{3} - 1)$; area $= 6a^2 (2 - \sqrt{3})$]

76 Un quadrilatero $ABCD$ è inscritto in un cerchio. I lati BC e AD sono uguali al lato del quadrato inscritto, mentre il lato AB è uguale al lato dell'esagono inscritto. Trovare la misura degli angoli del quadrilatero e dimostrare che esso è un trapezio isoscele. Trovare inoltre la misura dei suoi lati e dell'area della sua superficie, sapendo che il perimetro è $3a (1 + 2 \sqrt{2} + \sqrt{3})$.
[$\hat{A} = 105°$; $\hat{B} = 105°$; $\hat{C} = 75°$; $\hat{D} = 75°$; $\overline{AB} = 3a$; $\overline{BC} = 3a \sqrt{2}$; $\overline{CD} =$
$= 3a \sqrt{3}$; $\overline{DA} = 3a \sqrt{2}$; area $= 9a^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$]

77 Un quadrilatero $ABCD$ è inscritto in un cerchio. Il lato AB è uguale al raggio, il lato BC è uguale al lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza ed i lati CD e DA sono uguali tra loro. Trovare il perimetro del quadrilatero sapendo che l'area della sua superficie è $25a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$. [perimetro $= 5a (\sqrt{3} + 2 \sqrt{2} + 1)$]

78 In un triangolo ABC l'angolo $\hat{A}$ è ampio 60° e l'angolo $\hat{B}$ è ampio 75°. Sapendo che l'area della superficie del triangolo è $48a^2 (3 + \sqrt{3})$ trovare il suo perimetro ed i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta.
[perimetro $= 12a (2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$; $r = 2a (3 \sqrt{2} + \sqrt{6} - 2 \sqrt{3})$; $R = 8a \sqrt{3}$]

79 In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è $36a$ ed il raggio del cerchio inscritto è $10a$. Trovare il perimetro del triangolo. Trovare inoltre il perimetro del trapezio avente per basi la base del triangolo ed il segmento che congiunge i punti di tangenza della circonferenza con i due lati uguali.
$\left[\text{perim. triangolo} = 108a,\quad \text{perim. trapezio} = \frac{1020}{13}\, a\right]$

80 In un triangolo **rettangolo** il raggio del cerchio inscritto ed un cateto misurano rispettivamente $20a$ e $80a$. **Trovare** la misura dell'ipotenusa. [$100a$]

81 Un trapezio rettangolo avente l'angolo acuto di 30° è circoscritto ad un cerchio di raggio $a\sqrt{3}$. Trovare le misure dei lati del trapezio.
[$2a\sqrt{3}$; $4a\sqrt{3}$; $3a(\sqrt{3}-1)$; $3a(\sqrt{3}+1)$]

82 Nel trapezio dell'esercizio precedente si congiungano tra di loro i punti di contatto della circonferenza con i successivi lati del trapezio e si trovi il perimetro del quadrilatero che così si ottiene. [perimetro $= 2a\sqrt{6} + 3a\sqrt{2}$]

83 Un trapezio rettangolo avente l'angolo acuto di 60° è circoscritto ad un cerchio. Trovare l'area della superficie del trapezio sapendo che il suo perimetro è $8a(3+2\sqrt{3})$.
[area $= 24a^2(3+2\sqrt{3})$]

84 Nel trapezio dell'esercizio precedente si congiungano tra di loro i punti di contatto della circonferenza con i successivi lati del trapezio e si trovino il perimetro e l'area della superficie del quadrilatero che così si ottiene.
[perimetro $= 6a(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})$; area $= 18a^2(2+\sqrt{3})$]

85 L'area della superficie di un esagono regolare è $12a^2\sqrt{3}$. Trovare l'area del cerchio inscritto e quella del cerchio circoscritto all'esagono. Trovare inoltre l'area della superficie del triangolo che si ottiene congiungendo tre vertici dell'esagono non consecutivi a due a due. [$6\pi a^2$; $8\pi a^2$; $6a^2\sqrt{3}$]

86 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura $85a$ e l'altezza ad essa relativa la divide in parti tali che la differenza tra il triplo dell'una ed il doppio dell'altra è $10a$. Trovare l'area della superficie del triangolo e la misura della diagonale del quadrato in esso inscritto avente un lato sull'ipotenusa del triangolo stesso.

$$\left[\text{area} = 1785a^2;\quad \text{diagonale} = \frac{3570\sqrt{2}}{127}a\right]$$

87 In un triangolo rettangolo un cateto supera di $18a$ la sua proiezione sull'ipotenusa; sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa misura $30a$ trovare il perimetro del triangolo e le parti in cui l'ipotenusa è divisa dalla bisettrice dell'angolo retto.

$$\left[\text{perimetro} = 170a;\quad \frac{578}{23}a \text{ e } \frac{4335}{92}a\right]$$

88 Nel triangolo ABC, rettangolo in C, il perimetro misura $72a$ ed i cateti sono proporzionali ai numeri 3 e 4. Sull'ipotenusa AB determinare un punto P in modo che, dette H e K le sue proiezioni ortogonali sui cateti, il quadrilatero $PHCK$ sia un quadrato.

$$\left[\overline{AP} = \frac{90}{7}a\right]$$

89 In un trapezio isoscele avente gli angoli acuti di 60° le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui. Sapendo che l'area della superficie del trapezio è $27a^2\sqrt{3}$ trovare quale valore si deve attribuire ad a affinchè il perimetro del trapezio stesso misuri 84 dm.
[$a = 2{,}8$ dm]

90 In un parallelogrammo gli angoli acuti sono di 45°, l'altezza minore misura $6a\sqrt{2}$ e l'area della superficie è $36a^2 (2 + \sqrt{2})$. Trovare quale valore deve assumere a affinchè il perimetro del parallelogrammo misuri 84 dm. $[a = (3 - \sqrt{2})$ dm$]$

91 In un rombo un angolo è di 60° e la diagonale maggiore misura $12a$. Trovare quale valore attribuito ad a fa si che l'area della superficie del rombo sia 24 dm^2.

$$\left[a = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\ \text{dm}\right]$$

92 La superficie di un triangolo equilatero è $81a^2\sqrt{3}$. A partire da ciascun vertice, su ogni lato e nello stesso senso si segni un segmento uguale ad $\frac{1}{3}$ del lato stesso. Calcolare la misura del perimetro e l'area della superficie del triangolo che si ottiene congiungendo i tre punti, dopo aver dimostrato che anch'esso è un triangolo equilatero.

[perimetro $= 18a\sqrt{3}$; area $= 27a^2\sqrt{3}$]

93 La superficie di un triangolo equilatero è $256a^2\sqrt{3}$. A partire da ciascun vertice, su ogni lato e nello stesso senso si prenda un segmento uguale ad $\frac{1}{4}$ del lato stesso. Trovare il perimetro e l'area della superficie del triangolo che si ottiene congiungendo i tre punti, dopo aver dimostrato che è anch'esso un triangolo equilatero.

[perimetro $= 24a\sqrt{7}$; area $= 112a^2\sqrt{3}$]

94 In un trapezio rettangolo la diagonale minore è uguale al lato obliquo ed è ad esso perpendicolare. Sapendo che il perimetro del trapezio misura 28 cm trovare l'area della sua superficie. Trovare inoltre il perimetro del quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti medi dei successivi lati del trapezio, dopo aver dimostrato che il detto quadrilatero è un parallelogrammo.

[area $= 12(9 - 4\sqrt{2})$ cm^2; perimetro $= 2(4\sqrt{2} - 2 + 4\sqrt{5} - \sqrt{10})$ cm]

95 In un triangolo ABC, rettangolo in B, l'angolo $\hat{A}$ è di 60° e l'area della superficie è $18a^2\sqrt{3}$. Detti L, M ed N rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC e CA e detto H il piede della perpendicolare mandata da B all'ipotenusa, trovare perimetro ed area della superficie del quadrilatero $LMNH$, dopo aver dimostrato che esso è un trapezio isoscele.

$$\left[\text{perimetro} = 15a;\quad \text{area} = \frac{27a^2\sqrt{3}}{4}\right]$$

96 In un triangolo rettangolo avente un angolo di 60° ed il perimetro lungo $18a(1 + \sqrt{3})$, inscrivere un quadrato avente un lato giacente sull'ipotenusa del triangolo stesso.

$$\left[\text{lato quadrato} = \frac{36a(4 - \sqrt{3})}{13}\right]$$

97 In un triangolo rettangolo avente un angolo di 60° e l'area della superficie di $24a^2\sqrt{3}$, inscrivere un rettangolo avente la base giacente sull'ipotenusa e doppia dell'altezza.

[base rettangolo $= 24a(2 - \sqrt{3})$]

98 In un triangolo rettangolo, avente un angolo di 30° e l'ipotenusa che supera di 4 cm il cateto maggiore, inscrivere un quadrato avente un vertice coincidente con il vertice dell'angolo retto del triangolo stesso. [lato quadrato = $2(\sqrt{3}+3)$ cm]

99 Il perimetro di un triangolo, i cui lati sono proporzionali ai numeri 3, 5 e 7, misura $150a$. Trovare l'area della superficie del triangolo, le sue altezze, il raggio del cerchio in esso inscritto e quello del cerchio circoscritto.

$$\left[\text{area} = 375a^2\sqrt{3};\quad h_1 = 25a\sqrt{3};\quad h_2 = 15a\sqrt{3};\quad h_3 = \frac{75a\sqrt{3}}{7};\quad r = 5a\sqrt{3};\quad R = \frac{70a\sqrt{3}}{3}\right]$$

100 L'area della superficie di un triangolo, i cui lati sono proporzionali ai numeri 2, 3 e 4, è $12a^2\sqrt{15}$. Trovare il perimetro del triangolo, il raggio del cerchio in esso inscritto e quello del cerchio circoscritto. $\left[\text{perimetro} = 36a;\quad r = \frac{2a\sqrt{15}}{3};\quad R = \frac{32a\sqrt{15}}{15}\right]$

101 In un trapezio isoscele $ABCD$ il triplo della base maggiore AB è uguale al quintuplo dell'altezza, mentre il doppio dell'altezza supera di 16 cm la base AB ed i lati non paralleli misurano 52 cm. Detti A' e D' i simmetrici di A e di D rispetto alla retta BC, trovare il perimetro del quadrilatero $AA'D'D$, dopo aver stabilito di che natura è. Trovare infine il lato del quadrato equivalente al detto quadrilatero.

$$\left[\text{perimetro} = \frac{4232}{13}\ \text{cm};\quad \text{lato} = \frac{24}{13}\sqrt{1190}\ \text{cm}\right]$$

102 Un triangolo ABC, rettangolo in B, ha i cateti proporzionali ai numeri 3 e 4 ed è equivalente ad un quadrato di lato $2a\sqrt{3}$. Per il vertice B si mandi una retta, esterna al triangolo, che formi un angolo di 60° con il lato minore del triangolo e si chiamino A' e C' rispettivamente i simmetrici di A e C rispetto a tale retta. Trovare perimetro ed area della superficie del quadrilatero $AA'C'C$, dopo aver stabilito di che natura è.

$$\left[\text{perimetro} = a\,(14\sqrt{2} + 3\sqrt{6});\quad \text{area} = \frac{a^2\,(48 + 25\sqrt{3})}{2}\right]$$

103 Dimostrare che se in un triangolo un angolo è di 60° e a e b sono le misure dei lati che formano detto angolo, il terzo lato è uguale a $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ e l'area della superficie è $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$.

104 Dimostrare che se in un triangolo un angolo è di 30° e a e b sono le misure dei lati che formano detto angolo, il terzo lato è uguale a $\sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}}$ e l'area della superficie è $\frac{ab}{4}$.

105 Nel quadrato $ABCD$ si mandino dal vertice A due semirette che dividono l'angolo in A in tre angoli uguali; esse incontrino i lati BC e CD nei punti M e N. Sapendo che l'area della superficie del quadrilatero $AMCN$ è $800a^2$ trovare il lato del quadrato e la lunghezza del segmento MN.

$$\left[\text{lato} = 20a\sqrt{3+\sqrt{3}};\quad \overline{MN} = \frac{40a}{3}\sqrt{9-3\sqrt{3}}\right]$$

106 Trovare il perimetro del quadrilatero $AMCN$ dell'esercizio precedente. Dimostrare poi che nel quadrilatero $AMCN$ può essere inscritto un cerchio e trovarne il raggio. (Vedi esercizio n. 45).

$$\left[\text{perimetro} = \frac{40a}{3}\sqrt{(3+\sqrt{3})^3};\quad \text{raggio} = 20a\sqrt{9-5\sqrt{3}}\right]$$

107 Un trapezio $ABCD$, rettangolo in A e in D, è circoscritto ad un cerchio di raggio r. Trovare le misure dei suoi lati e delle sue diagonali, sapendo che l'angolo in B misura $60°$.

$$\left[\overline{AB} = r(1+\sqrt{3});\quad \overline{CD} = r\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\quad \overline{BC} = 4r\frac{\sqrt{3}}{3};\quad \overline{DA} = 2r;\right.$$

$$\left.\overline{AC} = r\sqrt{\frac{16+2\sqrt{3}}{3}};\quad \overline{DB} = r\sqrt{8+2\sqrt{3}}\right]$$

108 Riferendosi all'esercizio precedente, detti rispettivamente A' e D' i punti simmetrici di A e di D rispetto alla retta BC, trovare il perimetro e l'area della superficie del quadrilatero $AA'D'D$, dopo aver stabilito di che natura è.

$$\left[\text{perimetro} = 2r(4+\sqrt{3});\quad \text{area} = r^2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})\right]$$

109 In un triangolo due lati misurano rispettivamente $10a$ e $15a$, mentre l'angolo da essi formato è di $60°$. Trovare l'altezza relativa al terzo lato. (Vedi es. N. 103).

$$\left[\text{altezza} = \frac{15a\sqrt{21}}{7}\right]$$

110 In un triangolo due lati misurano rispettivamente a e $2a$, mentre l'angolo da essi formato è di $30°$. Trovare la misura del raggio del cerchio ad esso circoscritto. (Vedi es. N. 104).

$$\left[\text{raggio} = a\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right]$$

111 In un cerchio di raggio $4a$ trovare le misure degli archi corrispondenti ai seguenti angoli al centro: $30°$, $25°$, $22°30'$.

$$\left[\frac{2}{3}a\pi;\quad \frac{5}{9}a\pi;\quad \frac{1}{2}a\pi\right]$$

112 Riferendosi all'esercizio precedente trovare le aree delle superfici dei settori corrispondenti ai suddetti angoli al centro.

$$\left[\frac{4}{3}a^2\pi;\quad \frac{10}{9}a^2\pi;\quad a^2\pi\right]$$

113 In un cerchio di raggio 6 cm trovare le misure degli archi corrispondenti ai seguenti angoli al centro: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{5}$. [3π cm; $1{,}5\pi$ cm; $3{,}6\pi$ cm]

114 Riferendosi all'esercizio precedente trovare le aree delle superfici dei settori corrispondenti ai suddetti angoli al centro. [9π cm^2; $4{,}5\pi$ cm^2; $10{,}8\pi$ cm^2]

115 In un cerchio, il cui raggio misura $12a\sqrt{2}$, trovare l'area della superficie del segmento circolare compreso tra una corda uguale al raggio a l'arco minore da essa sotteso.
[area = $24a^2(2\pi - 3\sqrt{3})$]

116 In un cerchio, l'area della cui superficie è $12\pi a^2$, trovare la lunghezza del contorno e l'area della superficie del segmento circolare individuato da una corda uguale al lato del triangolo equilatero inscritto e dall'arco maggiore da essa sotteso.

$$\left[\text{contorno} = 2a\left(3 + \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}\right); \quad \text{area} = a^2(8\pi + 3\sqrt{3})\right]$$

117 Tre circonferenze uguali, di raggio $8a$, sono tangenti tra loro a due a due. Detti A, B, C i tre punti di contatto trovare la lunghezza del contorno e l'area della superficie del triangolo curvilineo ABC. [contorno = $8a\pi$; area = $32a^2(2\sqrt{3} - \pi)$]

118 In un cerchio di raggio r trovare la lunghezza del contorno e l'area della superficie del segmento circolare a due basi, individuato da due corde parallele giacenti dalla stessa parte rispetto al centro del cerchio, una uguale al raggio e l'altra al lato del quadrato inscritto nel cerchio.

$$\left[\text{contorno} = r\left(1 + \sqrt{2} + \frac{\pi}{6}\right); \quad \text{area} = \frac{r^2}{12}(\pi + 3\sqrt{3} - 6)\right]$$

119 L'area della superficie del minore dei due segmenti circolari determinati da una corda uguale al lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio è cm^2 $(4\pi - 3\sqrt{3})$. Determinare la misura del raggio del cerchio. Determinare inoltre l'area della superficie del maggiore dei due segmenti circolari individuati dalla suddetta corda.
[raggio = $2\sqrt{3}$ cm; area = $(8\pi + 3\sqrt{3})$ cm^2]

120 La lunghezza del contorno di un segmento circolare a due basi, individuato da due corde parallele di cui una uguale al raggio e l'altra al lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio e giacenti dalla stessa parte rispetto al centro del cerchio, è $3a(3 + 3\sqrt{3} + \pi)$. Trovare l'area della sua superficie. $\left[\text{area} = \frac{\pi r^2}{6}\right]$

121 In una circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 20a$, una corda CD perpendicolare al diametro lo incontra in un punto del segmento AO ed è uguale al lato del triangolo equilatero inscritto. Sia P il punto di incontro delle tangenti alla circonferenza in C e in D. Dimostrare che il quadrilatero $PDBC$ è un rombo e trovarne l'area della superficie. [area = $150a^2\sqrt{3}$]

122 Riferendosi all'esercizio precedente trovare l'area della superficie del triangolo mistilineo limitato dai segmenti *PC* e *PD* e dall'arco *CAD*, e quella del triangolo mistilineo limitato dai segmenti *PC* e *PD* e dall'arco *CBD*.

$$\left[100a^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right);\quad 100a^2\left(\sqrt{3}+\frac{21\pi}{3}\right)\right]$$

123 In una circonferenza di centro *O* e diametro $\overline{AB} = 12a$, una corda *CD* perpendicolare ad *AB* lo incontra in un punto di *AO* ed è uguale al lato del quadrato inscritto. Sia *P* il punto di incontro delle tangenti alla circonferenza in *C* e in *D*. Dimostrare che il quadrilatero *PDOC* è un quadrato. Trovare poi le ampiezze degli angoli del quadrilatero *PDBC* e l'area della sua superficie.

$[\hat{P} = 90°;\quad \hat{D} = \hat{C} = 112°\ 30';\quad \hat{B} = 45°;\quad \text{area} = 18a^2\ (\sqrt{2}+2)]$

124 Riferendosi all'esercizio precedente trovare la misura del contorno del triangolo mistilineo limitato dai segmenti *PC* e *PD* e dall'arco *CAD* e quella del triangolo mistilineo limitato dai segmenti *PC* e *PD* e dall'arco *CBD*. $[3a\ (4+\pi);\quad 3a\ (4+3\pi)]$

125 Dimostrare che una corona circolare è equivalente al cerchio avente per raggio la metà della corda del cerchio maggiore tangente al minore. Sapendo che l'area della superficie di una corona circolare è $200\pi a^2$, trovare la lunghezza della corda del cerchio maggiore tangente al minore. $[\text{corda} = 20a\ \sqrt{2}]$

126 In un trapezio isoscele il doppio della base maggiore uguaglia il triplo della minore, mentre l'altezza è i $\frac{4}{3}$ della differenza delle basi. Sapendo che l'area della superficie del trapezio è 30 dm^2 trovare l'area della superficie del cerchio ad esso circoscritto.

$$\left[\text{area} = \frac{21097\pi}{1024}\right]$$

127 In un settore ampio 60° e di raggio *r* è inscritto un cerchio; trovarne il raggio.

$$\left[\text{raggio} = \frac{r}{3}\right]$$

128 Riferendosi all'esercizio precedente, detti *O* il vertice del settore, *P* e *Q* i punti di contatto della circonferenza inscritta con i raggi delimitanti il settore ed *R* il punto di contatto tra circonferenza e arco del settore, trovare area della superficie e lunghezza del contorno del triangolo mistilineo limitato dai segmenti *OP* e *OQ* e dall'arco *PRQ*.

$$\left[\text{area} = \frac{r^2}{27}\ (3\sqrt{3}+2\pi);\quad \text{contorno} = \frac{2r}{9}\ (3\sqrt{3}+2\pi)\right]$$

129 Trovare l'area della superficie del cerchio inscritto in un settore ampio $\frac{\pi}{2}$ e di raggio $2a\sqrt{2}$. $[\text{area} = 8\pi a^2\ (3-2\sqrt{2})]$

130 Riferendosi all'esercizio precedente, trovare perimetro ed area della superficie del quadrilatero avente per vertici gli estremi dell'arco del settore ed i punti di contatto del cerchio inscritto con i raggi del settore.

[perimetro $= 4a\,(3\sqrt{2} - 2)$; area $= 8a^2\,(\sqrt{2} - 1)$]

131 Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo ABC rettangolo in A e avente l'angolo $\widehat{C}$ di 30° misura $10a$. Sia P il punto di incontro della bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$ con il cateto opposto e Q la proiezione ortogonale di P su BC. Trovare il perimetro del triangolo PBQ. [perimetro $= 20a\sqrt{3}$]

132 Riferendosi all'esercizio precedente, si traccino la semicirconferenza di diametro AB e giacente nel semipiano contenente C e la semicirconferenza di diametro AC e giacente nel semipiano contenente B. Sia P l'ulteriore punto di intersezione delle due semicirconferenze; dimostrare che il punto P è sull'ipotenusa BC. Trovare poi la lunghezza del contorno della parte di piano limitato dagli archi AP di entrambe le circonferenze.

$$\left[\text{contorno} = \frac{5a\pi}{3}\,(5 + 3\sqrt{3})\right]$$

133 Trovare l'area della parte di piano limitata dagli archi AP dell'esercizio precedente.

$$\left[\text{area} = 25a^2\,(\sqrt{3} + 1)^2\left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)\right]$$

134 In un triangolo isoscele la cui base è $\frac{4}{3}$ del lato, il raggio del cerchio inscritto misura $4a$. Trovare le misure dei lati del triangolo e l'area della superficie della parte di piano compresa tra i lati del triangolo e la circonferenza circoscritta al triangolo stesso.

[lato $= 6a\sqrt{5}$; base $= 8a\sqrt{5}$; area $= a^2\,(81\pi - 40\sqrt{5})$]

135 In un triangolo isoscele la base è i $\frac{3}{4}$ del lato. Trovare le misure dei raggi dei cerchi inscritto e circoscritto, sapendo che il loro prodotto è $\frac{144}{11}\,a^2$.

$$\left[r = \frac{3a\sqrt{330}}{22};\quad R = \frac{16a\sqrt{330}}{55}\right]$$

136 In un trapezio isoscele $ABCD$ (AB base maggiore) le diagonali si incontrano in un punto O che divide ciascuna di esse in parti una tripla dell'altra. Sapendo che l'angolo $A\widehat{O}B = 120°$ e che l'area della superficie del trapezio è $576a^2\sqrt{3}$, trovare il perimetro del trapezio e determinare per quale valore di a esso misura 240 cm.

[perimetro $= 24a\,(2\sqrt{3} + \sqrt{7})$; $a = 2\,(2\sqrt{3} - \sqrt{7})$ cm]

137 In un triangolo rettangolo le parti in cui la bisettrice dell'angolo retto divide l'ipotenusa sono l'una i $\frac{15}{8}$ dell'altra. Trovare il perimetro del triangolo sapendo che il raggio del cerchio in esso inscritto misura $12a$. Trovare poi per quale valore di a il triangolo è equivalente ad un triangolo equilatero di lato 12 cm.

$$\left[\text{perimetro} = 160a;\quad a = \frac{\sqrt[4]{675}}{20}\ \text{cm}\right]$$

138 Due circonferenze di centro O e O' sono tangenti internamente nel punto P ed il raggio della seconda è i $\frac{2}{5}$ del raggio della prima. Dal punto O (centro della maggiore) si mandino le tangenti alla minore e siano A e B i punti di intersezione di tali tangenti con la circonferenza maggiore. Sapendo che l'area della superficie del quadrilatero $OAPB$ è $600a^2$ trovare i raggi delle due circonferenze. [$12a$; $30a$]

139 In un triangolo di lati $4a$, $6a$ e $8a$ si mandino dal punto medio di un lato le rette parallele agli altri due lati e si determini l'area della superficie del parallelogrammo che si viene così a formare. Si determini poi per quale valore di a esso è equivalente all'esagono regolare di lato 6 cm. $\left[\text{area} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{2};\quad a = \frac{6\sqrt[4]{125}}{5}\ \text{cm}\right]$

140 Sia dato un triangolo i cui lati misurano a, b e c. Trovare la diagonale del rettangolo che ha per lati le parti in cui il lato che misura c viene diviso dalla bisettrice dell'angolo opposto. Trovare poi quale relazione deve intercorrere tra a, b e c affinchè tale diagonale sia uguale a quella di un rettangolo i cui lati misurano a e b.

$$\left[\text{diagonale} = \frac{c}{a+b}\sqrt{a^2+b^2};\quad ?\right]$$

141 Un rettangolo, avente il perimetro uguale a $88a$, è inscritto in un rombo l'area della cui superficie è $1.080a^2$ e le cui diagonali stanno tra loro nel rapporto $\frac{5}{12}$. Calcolare il rapporto tra le aree delle superfici del rombo e del rettangolo $\left[\frac{9}{4}\right]$

142 Sia AB un segmento di lunghezza $5a$ e siano CA e DB due segmenti ad esso perpendicolari di lunghezza rispettivamente $4a$ e $3a$. Si trovi su AB un punto P tale che il triangolo CPD sia isoscele sulla base CD e si trovi poi la lunghezza dell'altezza relativa alla base di tale triangolo. $\left[\overline{AP} = \frac{9a}{5};\quad \text{altezza} = \frac{91a\sqrt{26}}{130}\right]$

143 Siano AB, AC e DB gli stessi segmenti dell'esercizio precedente. Quali altri punti di AB sono tali da rendere isoscele il triangolo CPD? Trovare il rapporto tra le aree delle superfici dei due triangoli isosceli che si troveranno.

$$\left[\overline{AP_1} = a\sqrt{10};\quad \overline{AP_2} = a(5-\sqrt{17});\quad \text{rapporto} = \frac{(20-\sqrt{10})(15-\sqrt{17})}{208}\right]$$

144 In una circonferenza di centro O si tracci la corda AC che forma con il diametro AB un angolo di 30°; si tracci quindi la corda CD perpendicolare al suddetto diametro e sia R l'ulteriore estremo del diametro avente un estremo in D. Trovare il perimetro e l'area della superficie del triangolo DCR sapendo che è $2a^2\sqrt{3}$ l'area della superficie del triangolo DBH, dove H è l'intersezione del diametro AB con la corda CD.

[perimetro $= 4a(3+\sqrt{3})$; area $= 8a^2\sqrt{3}$]