Radicali

1. Radice n-esima

Terminologia

Il simbolo $k\sqrt[n]{a}$ è detto **radicale**.

Il numero a è detto **radicando**. Il numero n è detto **indice del radicale**. Il numero k è detto **coefficiente del radicale**.

Definizione

Sia n un numero naturale diverso da zero, la **radice n-esima** di un numero reale a è quel numero reale (se esiste):

- positivo o nullo b che, elevato a n, da come risultato a, se n è pari
- positivo, negativo o nullo b che, elevato a n, da come risultato a, se n è dispari

In simboli: $$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \begin{cases} \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}_0^+ \quad | \quad \boldsymbol{b}^n = \boldsymbol{a} & se\ \ n \text{ è } pari \\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R} \quad | \quad \boldsymbol{b}^n = \boldsymbol{a} & se\ \ n \text{ è } dispari \end{cases}$$

Segno del radicale

Sia n un numero naturale diverso da zero,

il radicale $\sqrt[n]{p(x)}$ $$\begin{cases} \geq 0 \quad \forall\, x \in C.E. & se\ n \text{ è } pari \\ ha\ lo\ stesso\ segno\ di\ \ p(x) & se\ n \text{ è } dispari \end{cases}$$

Condizioni di esistenza del radicale

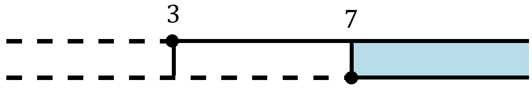
Il radicale $\sqrt[pari]{\boldsymbol{a}}$ esiste $\forall a \geq 0$ Il radicale $\sqrt[dispari]{\boldsymbol{a}}$ esiste $\forall a \in R$

Esempi

1. $\sqrt[2]{4} = 2$ perché $2^2 = 4$.
   Anche se esiste la soluzione -2 [infatti $(-2)^2 = 4$], si è convenuto di scegliere come radice di indice pari di un numero positivo soltanto la soluzione positiva, perché in matematica ogni operazione deve dar luogo ad un unico risultato.
   Se si accettassero le due soluzioni $\sqrt[2]{4} = +2$ e $\sqrt[2]{4} = -2$ si perverrebbe al seguente assurdo $+2 = \sqrt[2]{4} = -2$.
2. $\sqrt[2]{-4}$ non esiste perché $\nexists\, x \in R \ |\ x^2 = -4$
3. $\sqrt[2]{-9}$ non esiste perché $\nexists\, x \in R \ |\ x^2 = -9$
4. $\sqrt[3]{8} = 2$ perché $2^3 = 8$
5. $\sqrt[3]{-8} = -2$ perché $(-2)^3 = -8$
6. $\sqrt[2]{9} = 3$ perché $3^2 = 9$
7. La condizione di esistenza del radicale $\sqrt[4]{x-2}$ è $x - 2 \geq 0$ ossia $x \geq 2$
8. La condizione di esistenza del radicale $\sqrt[3]{x-2}$ è $\forall x \in R$
9. Le condizioni di esistenza del radicale $\sqrt[6]{x-3}$ sono $C.E.:\ x \geq 3$
10. Le condizioni di esistenza del radicale $\sqrt[5]{x-3}$ sono $C.E.:\ \forall x \in R$
11. Le condizioni di esistenza dell'espressione letterale irrazionale $\sqrt[6]{x-3} - 5x\sqrt[3]{7-x}$ sono $C.E.:\ \ x \geq 3$.

12. Le condizioni di esistenza dell'espressione letterale irrazionale $\sqrt[6]{x-3} - 5x\sqrt[4]{x-7}$ sono $C.E.:\ x \geq 7.$

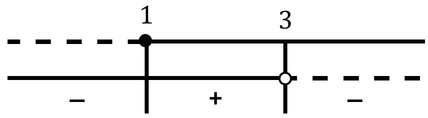
Infatti: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-7 \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 7 \end{cases}$



13. Le condizioni di esistenza del radicale $\sqrt[6]{\frac{x-1}{3-x}}$ sono $C.E.:\ 1 \leq x < 3$

Infatti:

$\dfrac{x-1}{3-x} \geq 0 \qquad \begin{matrix} x-1 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x \geq 1 \\ x < 3 \end{matrix}$

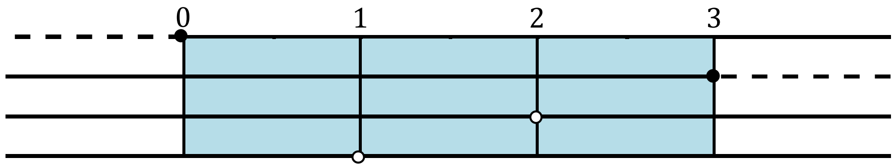


14. Le condizioni di esistenza dell'espressione letterale irrazionale : $\sqrt{7x} + \sqrt[6]{3-x} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{x-2}} + \frac{5x}{x-1}$ sono:

$C.E.:\ 0 \leq x < 1 \quad \vee \quad 1 < x \leq 2 \quad \vee \quad 2 < x \leq 3$

Infatti:

$\begin{cases} 7x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 3 \\ x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$



Prima proprietà fondamentale

$$\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a} \qquad \begin{matrix} a \geq 0 & se\ \ n\ è\ pari \\ a \in R & se\ \ n\ è\ dispari \end{matrix}$$

Esempi

1. $\left(\sqrt[3]{-5}\right)^3 = -5 \qquad \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5 \qquad \left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$
2. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}\right)^3 = \sqrt{5} \qquad \left(\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}\right)^3 = 1-\sqrt{5} \qquad \left(\sqrt[3]{a-5}\right)^3 = a-5$
3. $\left(\sqrt[4]{a-5}\right)^4 = a-5$ se $a-5 \geq 0$ ossia $a \geq 5$ (*per $a < 5$ il radicale non esiste*)

Seconda proprietà fondamentale

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a^n}} = \begin{cases} |\boldsymbol{a}| & se\ \ n\ \ è\ pari \\ \boldsymbol{a} & se\ \ n\ \ è\ dispari \end{cases}$$

$$|a| = \begin{cases} +a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a < 0 \end{cases}$$

Esempi

1. $\sqrt[4]{a^4} = |a| = \begin{cases} +a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt[5]{a^5} = a$
3. $\sqrt[3]{5^3} = 5$
4. $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
5. $\sqrt[4]{5^4} = 5$
6. $\sqrt[4]{(-5)^4} = -(-5) = 5$ perché $-5 < 0$
7. $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-1\right)^4} = \sqrt{3}-1$ perché $\sqrt{3}-1 > 0$
8. $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4} = -\left(1-\sqrt{3}\right) = -1+\sqrt{3}$ perché $1-\sqrt{3} < 0$

9. $\sqrt[2]{4a^2-12a+9} = \sqrt[2]{(2a-3)^2} = |2a-3| = \begin{cases} +(2a-3) & se\ a \geq \frac{3}{2} \\ -(2a-3) & se\ a < \frac{3}{2} \end{cases}$

10. $\sqrt[6]{(25a^2+30a+9)^3} = \sqrt[6]{[(5a+3)^2]^3} = \sqrt[6]{(5a+3)^6} = |5a+3| = \begin{cases} +(5a+3) & se\ a \geq -\frac{3}{5} \\ -(5a+3) & se\ a < -\frac{3}{5} \end{cases}$

11. $\sqrt[2]{4a^4+12a^2+9} = \sqrt[2]{(2a^2+3)^2} = |2a^2+3| = 2a^2+3$ perché $2a^2+3>0 \quad \forall a \in R$

12. $\sqrt[3]{8a^3+36a^2+54a+27} = \sqrt[3]{(2a+3)^3} = 2a+3$ perché l'indice del radicale è dispari.

13. $\sqrt[6]{(-2a^2-3)^6} = -(-2a^2-3) = 2a^2+3$ perché $-2a^2-3<0 \quad \forall a \in R$

Altre proprietà

I. $\sqrt[0]{a}$ non ha significato — Esempio : $\sqrt[0]{5}$ non ha significato

II. $\sqrt[1]{a} = a$ — Esempio : $\sqrt[1]{5} = 5$

III. $\sqrt[n]{0} = 0$ con $n \neq 0$ — Esempio : $\sqrt[3]{0} = 0$

IV. $\sqrt[n]{1} = 1$ con $n \neq 0$ — Esempio : $\sqrt[7]{1} = 1$

V. $\sqrt[dispari]{-a} = -\sqrt[dispari]{a} \quad \forall a \in R$ — Esempio : $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$

Proprietà invariantiva dei radicali

Il valore di un radicale, con radicando positivo o nullo, non cambia moltiplicando o dividendo per uno stesso numero naturale positivo sia l'indice del radicale sia l'esponente del radicando.

In simboli: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n\cdot k]{a^{p\cdot k}}} \qquad a \geq 0\,,\ n \in N^+,\ \ k \in N^+$

Dimostrazione

$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n\cdot k]{a^{p\cdot k}}}$ — Primo membro — Secondo membro

Eleviamo i due radicali allo stesso indice $\boldsymbol{n \cdot k}$ *:* $\quad \boldsymbol{\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a^p}\right)^{n\cdot k}} \qquad \boldsymbol{\sqrt[n\cdot k]{a^{p\cdot k}} = \left(\sqrt[n\cdot k]{a^{p\cdot k}}\right)^{n\cdot k}}$

Per la proprietà della potenza di una potenza $\quad \boldsymbol{= \left(\sqrt[n]{a^p}\right)^{n\cdot k} = \left[\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^{n}\right]^{k}} \qquad \boldsymbol{a^{p\cdot k}}$

Per la proprietà fondamentale $\quad \boldsymbol{= \left[\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^{n}\right]^{k} = (a^p)^k}$

Per la proprietà della potenza di una potenza $\quad \boldsymbol{(a^p)^k = a^{p\cdot k}}$

Esempi

1. $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ $\qquad \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6:2]{2^{4:2}} = \sqrt[3]{2^2}$

2. $\sqrt[3]{-7} = -\sqrt[3]{7} = -\sqrt[3\cdot 2]{7^2} = -\sqrt[6]{49}$ $\qquad \sqrt[4]{-7}$ non esiste

3. $\sqrt[2]{x} = \sqrt[2\cdot 2]{\dots}$ la condizione di esistenza è $x \geq 0$. Sotto la condizione $x \geq 0$ si ha: $\sqrt[2]{x} = \sqrt[4]{x^2}$

4. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3\cdot 3]{\dots}$ il radicale esiste $\forall x \in R$. Per poter applicare la proprietà invariantiva occorre che sia $x \geq 0$.
Distinguiamo pertanto i seguenti due casi:
se $x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x} = \sqrt[9]{x^3}$
se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{-(-x)} = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[9]{(-x)^3} = -\sqrt[9]{-x^3} = -\left(-\sqrt[9]{x^3}\right) = \sqrt[9]{x^3}$
In conclusione: $\sqrt[3]{x} = \sqrt[9]{x^3} \quad \forall x \in R$.

5. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3\cdot 2]{\dots}$ il radicale esiste $\forall x \in R$. Per poter applicare la proprietà invariantiva occorre che sia $x \geq 0$.
Distinguiamo pertanto i seguenti due casi:
se $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2}$ $\qquad$ se $x < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{-(-x)} = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[6]{(-x)^2} = -\sqrt[9]{x^2}$
In conclusione: $\sqrt[3]{x} = \begin{cases} +\sqrt[6]{x^2} & se\ \ x \geq 0 \\ -\sqrt[6]{x^2} & se\ \ x < 0 \end{cases}$

Semplificazione di un radicale

Un radicale $\sqrt[n]{a^p}$ si dice **irriducibile** se l'indice del radicale n e l'esponente del radicando p sono primi tra loro.

Per semplificare un radicale, con radicando positivo o nullo, occorre:

1. dividere l'indice del radicale e l'esponente del radicando per il loro M.C.D.
2. verificare le condizioni di esistenza e la concordanza dei segni dei due membri dell'uguaglianza.

Esempi

1. $\sqrt[4]{x^2}$ Il radicale esiste $\forall x \in R$. Per poter effettuare la semplificazione occorre che sia $x \geq 0$.
   Distinguiamo pertanto i seguenti due casi:
   se $x \geq 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$
   se $x < 0$ $\Rightarrow$ essendo $x^2 = (-x)^2$ $\Rightarrow$ $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{(-x)^2} = \sqrt[2]{-x}$ $\quad (-x > 0)$
   In conclusione: $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{+x} & se\ \ x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & se\ \ x < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt[6]{x^2}$ Il radicale esiste $\forall x \in R$. Per poter effettuare la semplificazione occorre che sia $x \geq 0$.
   Distinguiamo pertanto i seguenti due casi:
   se $x \geq 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$
   se $x < 0$ $\Rightarrow$ essendo $x^2 = (-x)^2$ $\Rightarrow$ $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{(-x)^2} = \sqrt[3]{-x}$ $\quad (-x > 0)$
   In conclusione: $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|} = \begin{cases} \sqrt[3]{+x} & se\ \ x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x} & se\ \ x < 0 \end{cases}$
3. $\sqrt[6]{x^3}$ Il radicale esiste per $x^3 \geq 0$ ossia per $x \geq 0$. Sotto tali condizioni si può effettuare la semplificazione $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x}$
   In conclusione: $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$.
4. $\sqrt[9]{x^3}$ Il radicale esiste $\forall x \in R$. Per poter effettuare la semplificazione occorre che sia $x \geq 0$. Distinguiamo i due casi:
   se $x \geq 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt[9]{x^3} = \sqrt[3]{x}$
   se $x < 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt[9]{x^3} = \sqrt[9]{-(-x)^3} = -\sqrt[9]{(-x)^3} = -\sqrt[3]{-x} = -(-\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x}$
   In conclusione: $\sqrt[9]{x^3} = \sqrt[3]{x}$ $\quad \forall x \in R$.

Regola pratica

Per la semplificazione di un radicale è utile impiegare la seguente regola pratica:

- utilizzare il valore assoluto quando: $\sqrt[pari]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{pari}}} = \sqrt[n]{|\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{dispari}}|}$
- aggiungere il C.E. quando: $\sqrt[pari]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{dispari}}} = \sqrt[pari]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{dispari}}} \quad \wedge \quad \{\boldsymbol{C.E.:\ a \geq 0}\}$

Esempi

1. $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{a^8} = a^2$ $\qquad$ $\sqrt[2]{a^4} = a^2$
2. $\sqrt[2]{a^2} = |a|$ $\qquad$ $\sqrt[3]{a^3} = a$ $\qquad$ $\sqrt[9]{a^3} = \sqrt[3]{a}$
3. $\sqrt[21]{a^{12}} = \sqrt[7]{a^4}$ $\qquad$ $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{|a|}$ $\qquad$ $\sqrt[24]{a^{12}} = \sqrt[6]{|a^3|}$
4. $\sqrt[10]{a^{15}} = \sqrt[2]{a^3} \quad \wedge \quad \{\text{C.E.}:\ a \geq 0\}$
5. $\sqrt[3]{4}$ è irriducibile perché $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$ e $m.c.m.(3;2) = 1$
6. $\sqrt[5]{49}$ è irriducibile perché $\sqrt[5]{49} = \sqrt[5]{7^2}$ e $m.c.m.(5;2) = 1$
7. $\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ $\qquad$ $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[2]{2}$
8. $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[3]{|-8|} = \sqrt[3]{8} = 2$ *la scrittura* $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[3]{-8}$ *è errata, perché* $\sqrt[6]{(-8)^2} \geq 0$ *mentre* $\sqrt[3]{-8} < 0$
9. $\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[3]{|-2|} = \sqrt[3]{2}$ *la scrittura* $\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[3]{-2}$ *è evidentemente errata.*
10. $\sqrt[6]{-8^2}$ non esiste, perché $-8^2 < 0$
11. $\sqrt[3]{-2^6} = -\sqrt[3]{2^6} = -2^2 = -4$
12. $\sqrt[9]{-5^{18}} = -\sqrt[9]{5^{18}} = -5^2 = -25$

13. $\sqrt[15]{(-2)^3} = \sqrt[15]{-2^3} = -\sqrt[15]{2^3} = -\sqrt[5]{2}$

14. $\sqrt[12]{\left(1-\sqrt{3}\right)^6} = \sqrt[2]{\left|1-\sqrt{3}\right|} =$ essendo $1-\sqrt{3}<0 \quad \Rightarrow \quad = \sqrt[2]{-\left(1-\sqrt{3}\right)} = \sqrt[2]{-1+\sqrt{3}}$

15. $\sqrt[2]{a^2-6a+9} = \sqrt[2]{(a-3)^2} = |a-3|$

16. $\sqrt[6]{8a^3-12a^2+6a-1} = \sqrt[6]{(2a-1)^3} = \sqrt[2]{2a-1}$ con $\text{C.E.}: a \geq \frac{1}{2}$

17. $\sqrt[12]{(5a-2)^8} = \sqrt[3]{(5a-2)^2}$

18. $\sqrt[2]{x^2-4x+4} = \sqrt[2]{(x-2)^2} = |x-2|$

19. $\sqrt[6]{x^3-3x^2+3x-1} = \sqrt[6]{(x-1)^3} = \sqrt[2]{x-1}$ $\quad \text{C.E.}: \forall x \geq 1$

20. $\sqrt[6]{(x-2)^4} = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

21. $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{5}\right)^4} = \left|2-\sqrt{5}\right| = -\left(2-\sqrt{5}\right)$ $\quad$ perchè $\quad 2-\sqrt{5}<0$

Riduzione di radicali allo stesso indice

Per ridurre più radicali allo stesso indice occorre:

1. semplificare i radicali
2. determinare il m.c.m. degli indici dei radicali
3. applicare la proprietà invariantiva in modo da trasformare ciascun radicale in uno equivalente avente per indice il m.c.m. degli indici dei radicali.

Esempi

1. $\langle \sqrt[3]{3a^4} \; ; \; \sqrt[4]{25} \rangle \Rightarrow \langle \sqrt[3]{3a^4} \; ; \; \sqrt[2]{5} \rangle \quad m.c.m.(3;2)=6 \Rightarrow \langle \sqrt[6]{(3a^4)^2} \; ; \; \sqrt[6]{5^3} \rangle$
2. $\langle \sqrt[6]{9a^8} \; ; \; \sqrt[24]{8a^6} \rangle \Rightarrow \langle \sqrt[6]{3^2a^8} \; ; \; \sqrt[24]{2^3a^6} \rangle \Rightarrow \langle \sqrt[3]{3a^4} \; ; \; \sqrt[8]{2a^2} \rangle$
   $m.c.m.(3;8)=24 \Rightarrow \langle \sqrt[24]{(3a^4)^8} \; ; \; \sqrt[24]{(2a^2)^3} \rangle$
3. $\langle \sqrt{x} \; ; \; \sqrt[4]{a^3} \; ; \; \sqrt[12]{a^5} \rangle \Rightarrow \langle \sqrt[12]{a^6} \; ; \; \sqrt[12]{a^9} \; ; \; \sqrt[12]{a^5} \rangle$ con C.E.: $a \geq 0$
4. $\langle \sqrt{x-1} \; ; \; \sqrt[3]{x-5} \; ; \; \sqrt[4]{6-x} \rangle \Rightarrow$ con C.E.: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 6 \end{cases}$ $\quad 1 \leq x \leq 6$ $\quad$ Inoltre
   il radicale cubico $\sqrt[3]{x-5}$ cambia segno in tale intervallo.
   $\sqrt[3]{x-5} \geq 0$ per $5 \leq x \leq 6$ $\qquad \sqrt[3]{x-5} < 0$ per $1 \leq x < 5$
   Pertanto si hanno i seguenti due casi :
   Per $5 \leq x \leq 6 \Rightarrow \langle \sqrt[12]{(x-1)^6} \; ; \; +\sqrt[12]{(x-5)^4} \; ; \; \sqrt[12]{(6-x)^3} \rangle$
   Per $1 \leq x < 5 \Rightarrow \langle \sqrt[12]{(x-1)^6} \; ; \; -\sqrt[12]{(x-5)^4} \; ; \; \sqrt[12]{(6-x)^3} \rangle$
   perché $\sqrt[3]{x-5} = -\sqrt[3]{-(x-5)} = -\sqrt[3]{5-x} = -\sqrt[12]{(5-x)^4} = -\sqrt[12]{(x-5)^4}$ con $-(x-5) \geq 0$
5. $\langle \sqrt[3]{x-4} \; ; \; \sqrt{x-1} \rangle$ con C.E.: $x \geq 1$ $\quad$ Inoltre $\sqrt[3]{x-4}$ cambia segno in tale intervallo.
   $\sqrt[3]{x-4} \geq 0$ per $x \geq 4$ $\qquad \sqrt[3]{x-4} < 0$ per $1 \leq x < 4$ $\quad$ Pertanto:
   per $x \geq 4 \Rightarrow \langle +\sqrt[6]{(x-4)^2} \; ; \; \sqrt[6]{(x-1)^3} \rangle$
   Per $1 \leq x < 4 \Rightarrow \langle -\sqrt[6]{(x-4)^2} \; ; \; \sqrt[6]{(x-1)^3} \rangle$

Confronto di radicali

Fra due radicali positivi aventi lo stesso indice, il maggiore è quello che ha il radicando maggiore.

Esempi

1. $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{7}$
2. $\sqrt[7]{3} < \sqrt[7]{5}$
3. $\sqrt[6]{3}$ e $\sqrt[4]{2}$ $\quad m.c.m.(6;4)=12 \Rightarrow \sqrt[12]{3^2}$ e $\sqrt[12]{2^3}$ $\quad \sqrt[12]{9} > \sqrt[12]{8}$
4. $\sqrt[7]{3}$ e $\sqrt[4]{2}$ $\quad m.c.m.(7;4)=28 \Rightarrow \sqrt[28]{3^4}$ e $\sqrt[28]{2^7}$ $\quad \sqrt[28]{81} < \sqrt[28]{128}$

2. Moltiplicazione e divisione di radicali

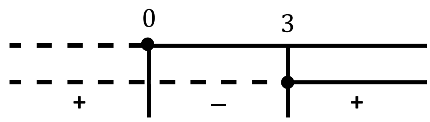
Moltiplicazione di radicali

Nell'ipotesi che siano verificate le condizioni di esistenza dei radicali, il prodotto di due radicali aventi lo stesso indice è uguale al radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

In simboli: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$ con $a \geq 0 \quad \wedge \quad b \geq 0$

Esempi

1. $\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$
2. $\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[10]{6} = \sqrt[20]{6^5} \cdot \sqrt[20]{6^2} = \sqrt[20]{6^5 \cdot 6^2}$
3. $\sqrt[5]{3a^2} \cdot \sqrt[5]{2a} = \sqrt[5]{6a^3}$
4. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
5. $\sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{7^2} \cdot \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{7^2 \cdot 5^3}$
6. $\sqrt[7]{5a^3} \cdot \sqrt[7]{4a^2} = \sqrt[7]{20a^5}$
7. $\sqrt[2]{-4} \cdot \sqrt[2]{-4} = \sqrt[2]{(-4) \cdot (-4)}$ è un'uguaglianza errata. Perché ?
8. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a-3} = \sqrt{a \cdot (a-3)}$ con C.E.: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a-3 \geq 0 \end{cases}$ ossia $a \geq 3$.
9. Trasformare il radicale $\sqrt{a \cdot (a-3)}$ nel prodotto di due radicali.
   C.E.:
   $a \cdot (a-3) \geq 0$; $\quad \begin{matrix} a \geq 0 & a \geq 0 \\ a-3 \geq 0 & a \geq 3 \end{matrix}$



C.E.: $x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 3$

Pertanto per $x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 3$ si ha $\sqrt{a \cdot (a-3)} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|a-2|}$

oppure si può scrivere: $\sqrt{a \cdot (a-3)} = \begin{cases} \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-(a-2)} & per \;\; x \leq 0 \\ \sqrt{+a} \cdot \sqrt{+(a-2)} & per \;\; x \geq 3 \end{cases}$

Divisione di radicali

Nell'ipotesi che siano verificate le condizioni di esistenza dei radicali, il quoziente dei due radicali aventi lo stesso indice è uguale al radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi.

In simboli: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}}$ $\quad \forall \boldsymbol{a \geq 0} \quad \wedge \quad \forall \boldsymbol{b} > 0$

Esempi

1. $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4:2} = \sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt[6]{9} : \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{9:3} = \sqrt[6]{3}$
3. $\sqrt[3]{4} : \sqrt[2]{2} = \sqrt[6]{4^2} : \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2}$
4. $\sqrt[4]{6} : \sqrt[10]{6} = \sqrt[20]{6^5} : \sqrt[20]{6^2} = \sqrt[20]{6^5 : 6^2} = \sqrt[20]{6^3}$
5. $\sqrt[7]{5a^6} : \sqrt[7]{3a^2} = \sqrt[7]{\frac{5}{3}a^4}$
6. $\sqrt[5]{3a^2} : \sqrt[5]{2a} = \sqrt[5]{\frac{3a^2}{2a}} = \sqrt[5]{\frac{3}{2}a}$
7. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-3}} = \sqrt{\frac{a}{a-3}}$ con C.E.: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a-3 > 0 \end{cases}$ ossia $a > 3$.

3. Trasporto sotto e fuori dal segno di radice

Trasporto di un fattore dentro al segno di radice di indice dispari

Per trasportare un fattore esterno sotto il segno di radice di indice dispari, come fattore del radicando, occorre elevarlo all'indice del radicale.

In simboli: $\boldsymbol{a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}}$ $\qquad \forall\, \boldsymbol{a, b \in R \quad \wedge \quad n\ dispari}$

<u>*Dimostrazione*</u>

Per la proprietà fondamentale dei radicali aritmetici si ha: $a = \sqrt[n]{a^n} \quad \forall a \in R$.

Sostituendo tale relazione in: $a \cdot \sqrt[n]{b}$ *si ottiene:* $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$.

Esempi

1. $3\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 2}$
2. $2\sqrt[7]{3} = \sqrt[7]{2^7 \cdot 3} = \sqrt[7]{384}$
3. $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{-8 \cdot 5} = \sqrt[3]{-40} = -\sqrt[3]{40}$
4. $-4\sqrt[3]{5} = -\sqrt[3]{4^3 \cdot 5} = -\sqrt[3]{320}$
5. $a\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^5 \cdot b}$
6. $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b}$
7. $3a^2\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(3a^2)^3 b}$
8. $7a^4\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{(7a^4)^5 b}$
9. $\boldsymbol{(a-1) \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{a^2-2a+1}} = \sqrt[3]{(a-1)^3 \cdot \frac{2}{(a-1)^2}} = \sqrt[3]{2 \cdot (a-1)}}$
10. $(1-2a) \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{4a^2-4a+1}} = \sqrt[5]{(1-2a)^5 \cdot \frac{3}{(1-2a)^2}} = \sqrt[5]{3 \cdot (1-2a)^3}$

Trasporto di un fattore dentro al segno di radice di indice pari

Se l'indice del radicale è un numero pari è possibile portare sotto il segno di radice solo fattori positivi.

In simboli: $\boldsymbol{a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}} \qquad \forall\, \boldsymbol{a, b \in R_0^+ \quad \wedge \quad n\ pari}$

Esempi

1. $2\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5}$
2. $3\sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{3^2 \cdot 5}$
3. $-2\sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = -\sqrt[4]{80}$ La scrittura: $-2\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{(-2)^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{80}$ è, evidentemente, errata. Infatti $-2\sqrt[4]{5}$ è un numero negativo, mentre $\sqrt[4]{80}$ è un numero positivo.
4. $\boldsymbol{-3\sqrt[2]{5} = -\sqrt[2]{3^2 \cdot 5} = -\sqrt[2]{45}}$ La scrittura: $\boldsymbol{-3\sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{(-3)^2 \cdot 5} = \sqrt[4]{45}}$ è, evidentemente, errata. Infatti $\boldsymbol{-3\sqrt[2]{5}}$ è un numero negativo, mentre $\boldsymbol{\sqrt[4]{45}}$ è un numero positivo.
5. $\left(2-\sqrt{7}\right)\sqrt[4]{a}$ Essendo $\left(2-\sqrt{7}\right)$ un numero negativo non lo si può portare sotto il segno di radice.
   Ma riscrivendolo sotto la forma: $-\left(\sqrt{7}-2\right)$ si può portare sotto il segno di radice il fattore positivo $\left(\sqrt{7}-2\right)$
   Si ottiene: $-\left(\sqrt{7}-2\right)\sqrt[4]{a} = -\sqrt[4]{\left(\sqrt{7}-2\right)^4 a}$

6. $\left(1-\sqrt{5}\right)\sqrt[4]{x}$ Essendo $\left(1-\sqrt{5}\right)$ un numero negativo non lo si può portare sotto il segno di radice.
Ma riscrivendolo sotto la forma: $-\left(\sqrt{5}-1\right)$ si può portare sotto il segno di radice il fattore positivo $\left(\sqrt{5}-1\right)$
Si ottiene: $-\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt[4]{x} = -\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-1\right)^4 x}$

7. $a\sqrt[6]{b}$ Essendo a una variabile di cui non si conosce il segno, occorre distinguere due casi:
se $a \geq 0$ si ha che: $a\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{a^6 b}$
se $a < 0$ riscrivendo $a = -(-a)$ si può portare sotto la radice il fattore positivo $(-a) \geq 0$
$\Rightarrow \; a\sqrt[6]{b} = -(-a)\sqrt[6]{b} = -\sqrt[6]{(-a)^6\, b} = -\sqrt[6]{a^6\, b}$
sintetizzando il ragionamento si può scrivere: $a\sqrt[6]{b} = \begin{cases} +\sqrt[6]{a^6\, b} & se\;\; a \geq 0 \\ -\sqrt[6]{a^6\, b} & se\;\; a < 0 \end{cases}$

8. $a\sqrt[4]{x}$ Essendo a una variabile di cui non si conosce il segno, occorre distinguere due casi:
se $a \geq 0$ si ha che: $a\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{a^4\, x}$
se $a < 0$ riscrivendo $a = -(-a)$ si può portare sotto la radice il fattore positivo $(-a) \geq 0$
$\Rightarrow \; a\sqrt[4]{x} = -(-a)\sqrt[4]{x} = -\sqrt[4]{(-a)^4\, x} = -\sqrt[4]{a^4\, x}$
sintetizzando il ragionamento si può scrivere: $a\sqrt[4]{x} = \begin{cases} +\sqrt[4]{a^4\, x} & se\;\; a \geq 0 \\ -\sqrt[4]{a^4\, x} & se\;\; a < 0 \end{cases}$

9. $(\boldsymbol{a}-\mathbf{3})\sqrt[2]{\boldsymbol{x}} = \begin{cases} +\sqrt[2]{(\boldsymbol{a}-\mathbf{3})^2\, \boldsymbol{x}} & \mathbf{se}\;\; \boldsymbol{a}-\mathbf{3} \geq \mathbf{0} \quad \text{cio}\grave{\text{e}}\; \mathbf{se}\;\; \boldsymbol{a} \geq \mathbf{3} \\ -\sqrt[2]{(\boldsymbol{a}-\mathbf{3})^2\, \boldsymbol{x}} & \mathbf{se}\;\; \boldsymbol{a}-\mathbf{3} < 0 \quad cio\grave{e}\; se\;\; a < \mathbf{3} \end{cases}$

10. $(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3})\sqrt[4]{\boldsymbol{x}} = \begin{cases} +\sqrt[4]{(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^4\, \boldsymbol{x}} & \mathbf{se}\;\; \mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3} \geq \mathbf{0} \quad \text{cio}\grave{\text{e}}\; \mathbf{se}\;\; \boldsymbol{x} \geq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \\ -\sqrt[4]{(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^4\, \boldsymbol{x}} & \mathbf{se}\;\; \mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3} < 0 \quad cio\grave{e}\; se\;\; x < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \end{cases}$

Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice

Se sotto il segno di radice compare un fattore con esponente maggiore o uguale all'indice del radicale, si può trasportare il fattore fuori dal segno di radice mediante il seguente procedimento:

1. si riscrive il radicale come prodotto di due radicali con lo stesso indice del radicale originario e aventi:
   - come I radicando, il fattore originario elevato al multiplo più grande dell'indice, inferiore all'esponente del radicando
   - come II radicando, il fattore originario elevato al resto della divisione fra l'esponente del radicando e l'indice del radicale
2. si effettua la semplificazione del I radicale (*vedi semplificazione di un radicale a pag. 4*).

Esempi

1. $\sqrt[7]{\mathbf{2^{38}}} = \sqrt[7]{\mathbf{2^{35}}}\cdot\sqrt[7]{\mathbf{2^3}} = \mathbf{2^5}\,\sqrt[7]{\mathbf{2^3}}$

38	7
3	5

2. $\sqrt[5]{\mathbf{3^{32}}} = \sqrt[5]{\mathbf{3^{30}}}\cdot\sqrt[5]{\mathbf{3^2}} = \mathbf{3^6}\,\sqrt[5]{\mathbf{3^2}}$

32	5
2	6

3. $\sqrt[5]{\mathbf{2^{48}}} = \sqrt[5]{\mathbf{2^{45}}}\cdot\sqrt[5]{\mathbf{2^3}} = \mathbf{2^9}\,\sqrt[5]{\mathbf{2^3}}$

48	5
3	9

4. $\sqrt[4]{\mathbf{2^{31}}} = \sqrt[4]{\mathbf{2^{28}}}\cdot\sqrt[4]{\mathbf{2^3}} = \mathbf{2^7}\,\sqrt[4]{\mathbf{2^3}}$

31	4
3	7

5. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3} = 2\,\sqrt[3]{3}$
6. $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^2} = 2\,\sqrt[3]{9}$
7. $\sqrt{12} = \sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt{2^2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
8. $\sqrt{48} = \sqrt{2^4\cdot 3} = \sqrt{2^4}\cdot\sqrt{3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
9. $\sqrt{20} = \sqrt{2^2\cdot 5} = \sqrt{2^2}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

10. $\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{5} = 2^2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

11. $\sqrt[3]{a^{16}} = \sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^5 \sqrt[3]{a}$

12. $\sqrt[3]{a^{17}} = \sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^5 \sqrt[3]{a^2}$

13. $\sqrt[6]{x^6} = |x|$ $\qquad \sqrt{x^4} = x^2$ $\qquad \sqrt{x^2} = |x|$

14. $\sqrt[6]{x^{12}} = x^2$ $\qquad \sqrt[4]{x^{12}} = |x^3|$ $\qquad \sqrt{x^6} = |x^3|$

15. $\sqrt[4]{2x^4} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{2} = |x|\sqrt[4]{2}$

16. $\sqrt[4]{x^4 y} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y} = |x|\sqrt[4]{y}$ con C.E.: $y \geq 0$

17. $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = |x| \sqrt{y}$ con C.E.: $y \geq 0$

18. $\sqrt[3]{x^3 y} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y} = x \sqrt[3]{y}$

19. $\sqrt[5]{x^{13} y} = \sqrt[5]{x^{10}} \cdot \sqrt[5]{x^3 y} = x^2 \sqrt[5]{x^3 y}$

20. $\sqrt[5]{x^8 y} = \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[5]{x^3 y} = x \sqrt[5]{x^3 y}$

21. $\sqrt[6]{x^{11}}$ Il radicale esiste per $x^{11} \geq 0$ ossia per $x \geq 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt[6]{x^{11}} = \sqrt[6]{x^6} \cdot \sqrt[6]{x^5} = x \cdot \sqrt[6]{x^5}$ con $x \geq 0$

22. $\sqrt{x^5}$ Il radicale esiste per $x^5 \geq 0$ ossia per $x \geq 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x^5} = \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot \sqrt{x}$ con $x \geq 0$

23. $\sqrt{x^3}$ Il radicale esiste per $x^3 \geq 0$ ossia per $x \geq 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = x \cdot \sqrt{x}$ con $x \geq 0$

24. $\sqrt[4]{(x-3)^5}$ C.E.: $x \geq 3$ $\Rightarrow$ $\sqrt[4]{(x-3)^5} = \sqrt[4]{(x-3)^4} \cdot \sqrt[4]{x-3} = (x-3) \cdot \sqrt[4]{x-3}$ con $x \geq 3$

25. $\sqrt[4]{x^4(x-3)} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x-3} = x \cdot \sqrt[4]{x-3}$ con C.E.: $x = 0 \ \vee \ x \geq 3$

26. $\sqrt[4]{x^4(-x-3)}$ C.E.: $x \leq -2 \ \vee \ x = 0$. Se sono soddisfatte le C.E., $x \leq 0$. Pertanto:

$\sqrt[4]{x^4(-x-3)} = |x| \cdot \sqrt[4]{-x-3} = -x \cdot \sqrt[4]{-x-3}$ con $x \leq -2 \ \vee \ x = 0$

27. $\sqrt[4]{x^5(x-3)} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x \cdot (x-3)} = |x| \cdot \sqrt[4]{x \cdot (x-3)}$ con C.E.: $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 3$

oppure si può scrivere: $\sqrt[4]{x^5(x-3)} = \begin{cases} +x \cdot \sqrt[4]{x \cdot (x-3)} & per\ x \geq 3 \\ -x \cdot \sqrt[4]{x \cdot (x-3)} & per\ x \leq 0 \end{cases}$

4. Addizione e sottrazione di radicali

Definizione

Due radicali irriducibili si dicono simili quando hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

Esempi

- $2\sqrt[4]{7}$ e $3\sqrt[4]{7}$ sono simili
- $4a^2\sqrt[3]{b}$ e $7a^3\sqrt[3]{b}$ sono simili

Addizione e sottrazione di radicali

La somma algebrica di due o più radicali simili è uguale ad un radicale, simile ai dati, che ha come coefficiente, la somma algebrica dei coefficienti dei radicali.

Esempi

$2\sqrt[4]{7} + 3\sqrt[4]{7} = 5\sqrt[4]{7}$ $\qquad$ $4a^2\sqrt[3]{b} - 7a^3\sqrt[3]{b} = (4a^2 - 7a^3)\sqrt[3]{b}$

Osservazione importante

$\cancel{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a+b}}$ $\qquad$ Esempio : $\sqrt{9} + \sqrt{4} \neq \sqrt{9+4}$

$\cancel{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a-b}}$ $\qquad$ Esempio : $\sqrt{9} - \sqrt{4} \neq \sqrt{9-4}$

5. Potenza e radice di un radicale

Potenza di un radicale

La potenza k-esima di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza k-esima del radicando.

In simboli: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{\boldsymbol{a^k}}$ $\quad\quad \forall a \geq 0$

Esempio

1. $\left(\sqrt[5]{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{4}} = \sqrt[5]{\mathbf{3^4}}$
2. $\left(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{2^2}\left(\sqrt{\mathbf{6}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{4 \cdot 6 = 24}$
3. $\left(\sqrt[5]{\boldsymbol{a^2}}\right)^{\mathbf{4}} = \sqrt[5]{\boldsymbol{a^{2\cdot 4}}} = \sqrt[5]{\boldsymbol{a^8}} = \sqrt[5]{\boldsymbol{a^5}} \cdot \sqrt[5]{\boldsymbol{a^3}} = \boldsymbol{a}\sqrt[5]{\boldsymbol{a^3}}$
4. $\left(\sqrt[4]{\boldsymbol{x-3}}\right)^{\mathbf{4}} = \boldsymbol{x-3}$ $\quad$ con $\boldsymbol{x \geq 3}$

Radice di un radicale

La radice k-esima di un radicale è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici e per radicando lo stesso radicando.

In simboli: $\sqrt[k]{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[n\cdot k]{\boldsymbol{a}}$ $\quad\quad \forall a \geq 0$

Esempio

1. $\sqrt{\sqrt[3]{\mathbf{64}}} = \sqrt[2\cdot 3]{\mathbf{2^6}} = \mathbf{2}$
2. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[5\cdot 3]{\boldsymbol{a}}$
3. $\sqrt[5]{-\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}} = -\sqrt[5]{\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}} = -\sqrt[15]{\boldsymbol{a}}$
4. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\boldsymbol{a-3}}} = \sqrt[20]{\boldsymbol{a-3}}$ $\quad$ con $\boldsymbol{a \geq 3}$

6. Razionalizzazione di un radicale

La razionalizzazione è la trasformazione di una frazione contenente radicali al denominatore in un'altra equivalente priva di radicali al denominatore.

Per razionalizzare il denominatore di una frazione occorre distinguere vari casi:

I caso – a denominatore compare un radicale quadratico $\sqrt{a}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il radicale quadratico che figura a denominatore $\sqrt[2]{a}$.

Esempi

1. $\frac{\mathbf{7}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\mathbf{7}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{\mathbf{5\cdot 5}}} = \frac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}}$
2. $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5\cdot 5}}} = \frac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2\cdot 5}} = \frac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{10}}$
3. $\frac{\mathbf{7}}{\sqrt{\mathbf{8}}} = \frac{\mathbf{7}}{\sqrt{\mathbf{2^3}}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2\cdot 2}}} = \frac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$

II caso – a denominatore compare un radicale non quadratico $\sqrt[n]{a^p}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il radicale $\sqrt[n]{a^{n-p}}$

Esempi

1. $\frac{4}{\sqrt[7]{3^2}} = \frac{4}{\sqrt[7]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{3^{7-2}}}{\sqrt[7]{3^{7-2}}} = \frac{4\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2}.\sqrt[7]{3^5}} = \frac{4\sqrt[7]{243}}{\sqrt[7]{3^2 \cdot 3^5}} = \frac{4\sqrt[7]{243}}{\sqrt[7]{3^7}} = \frac{4\sqrt[7]{243}}{3}$
2. $\frac{4}{\sqrt[7]{8}} = \frac{4}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{4}{\sqrt[7]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^{7-3}}}{\sqrt[7]{2^{7-3}}} = \frac{4\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3}.\sqrt[7]{2^4}} = \frac{4\sqrt[7]{16}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{4\sqrt[7]{16}}{2} = 2\sqrt[7]{16}$

III caso – a denominatore compare la somma o la differenza di due radicali quadratici $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Esempi

1. $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$
2. $\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{8(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = 4\sqrt{5}+4\sqrt{3}$
3. $\frac{5}{7-2\sqrt{6}} = \frac{5}{7-2\sqrt{6}} \cdot \frac{7+2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}} = \frac{5(7+2\sqrt{6})}{(7)^2-(2\sqrt{6})^2} = \frac{5(7+2\sqrt{6})}{49-24} = \frac{5(7+2\sqrt{6})}{25} = \frac{7+2\sqrt{6}}{5}$

III caso – a denominatore compare la somma algebrica di tre radicali quadratici $\sqrt{a} \mp \sqrt{b} \mp \sqrt{c}$

Occorre applicare due volte il metodo utilizzato nel II caso.

Esempio

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} = \frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+1} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-1} = \frac{4\cdot[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-1]}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{4\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{2+3+2\sqrt{6}-1} = \frac{4\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{4+2\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{6}} = \frac{2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{6}} \cdot \frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} = \frac{2\cdot(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2-\sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{6})}{2^2-(\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{2\cdot(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4-6} = \frac{2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2)}{-2} = \sqrt{2}-\sqrt{6}+2$$

IV caso – a denominatore compare la somma o la differenza di due radicali cubici $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il fattore $\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2}$

Esempi

1. $\frac{6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}} = \frac{6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} = \frac{6(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{4})^3+(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{6(2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4})}{4+2} = 2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}$
2. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

7. Radicale quadratico doppio

Un'espressione del tipo $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ è detto radicale quadratico doppio.

Se l'espressione a^2-b è un quadrato perfetto il radicale doppio può essere trasformato nella somma di due radicali semplici con le seguenti formule:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \qquad\qquad \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Esempi

1. $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ essendo $a^2-b = 5^2-24 = 1$ il radicale doppio si può semplificare $\Rightarrow$
   $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{1}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{1}}{2}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}}\ \ \sqrt{3}+\sqrt{2}$
2. $\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{8-\sqrt{4^2\cdot 3}} = \sqrt{8-\sqrt{48}}$ *essendo* $a^2-b = 8^2-48 = 16$ *si può semplificare* $\Rightarrow$
   $\sqrt{8-\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{8+\sqrt{16}}{2}} - \sqrt{\frac{8-\sqrt{16}}{2}} = \sqrt{\frac{8+4}{2}} - \sqrt{\frac{8-4}{2}} = \sqrt{\frac{12}{2}} - \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$

8. Potenza ad esponente frazionario

La potenza di un numero reale positivo con esponente frazionario è uguale al radicale che ha per indice il denominatore della frazione e per esponente del radicando il numeratore della frazione.

In simboli: $\boldsymbol{a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}}$ $\qquad \forall\, a \geq 0$

Esempi

1. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ infatti $8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$
2. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
3. $\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{8}{125}}$