NOTE SUI SISTEMI SIMMETRICI

Un sistema si dice simmetrico se le sue equazioni rimangono invariate scambiando tra loro le incognite.

Sono simmetrici: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2xy + x + y = 10 \\ xy = 8 \end{cases}$

Risoluzione di sistemi simmetrici di due equazioni in due incognite. Il più semplice sistema simmetrico di due equazioni in due incognite è il sistema di 2° grado.

Esempio: $\begin{cases} x + y = 16 \\ xy = 10 \end{cases}$ L'equazione risolvente è: $t^2 - 16t + 10 = 0$

E le sue radici sono: $t_1 = 8 + \sqrt{54}$ e $t_2 = 8 - \sqrt{54}$

Le risoluzioni del sistema sono quindi: $\begin{array}{c|c|c} x & 8 + \sqrt{54} & 8 - \sqrt{54} \\ y & 8 - \sqrt{54} & 8 + \sqrt{54} \end{array}$

Per risolvere i sistemi simmetrici di altro tipo si devono riportare, mediante una serie di opportune trasformazioni, a sistemi del tipo fondamentale; perciò si devono tenere presenti alcune identità, di immediata verifica, dette formule di **Waring**, che qui si elencano:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy\,(x + y)$$

$$x^4 + y^4 = (x + y)^4 - 4xy\,(x + y)^2 + 2x^2y^2$$

$$x^5 + y^5 = (x + y)^5 - 5xy\,(x + y)^3 + 5x^2y^2\,(x + y)$$

....

Esempio: risoluzione del seguente sistema simmetrico di 2° grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Si sostituisce nella prima equazione $x^2 + y^2$ l'espressione:

$(x^2 + y^2)^2 - 2xy$ (la prima formula di **Waring** riportata sopra)

Il sistema diventa: $\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 10 \\ x+y = 4 \end{cases}$

Sostituendo 4 all'espressione $x + y$ nella 1° equazione, si ottiene:

$\begin{cases} 16 - 2xy = 10 \\ x+y = 4 \end{cases}$ da cui: $\begin{cases} xy = 3 \\ x+y = 4 \end{cases}$

mettendola in ordine si avrà: $\begin{cases} x+y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$

Quest'ultimo è il sistema simmetrico fondamentale e la sua equazione è:

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

Le soluzioni del sistema saranno pertanto: $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 3 \\ y & 3 & 1 \end{array}$