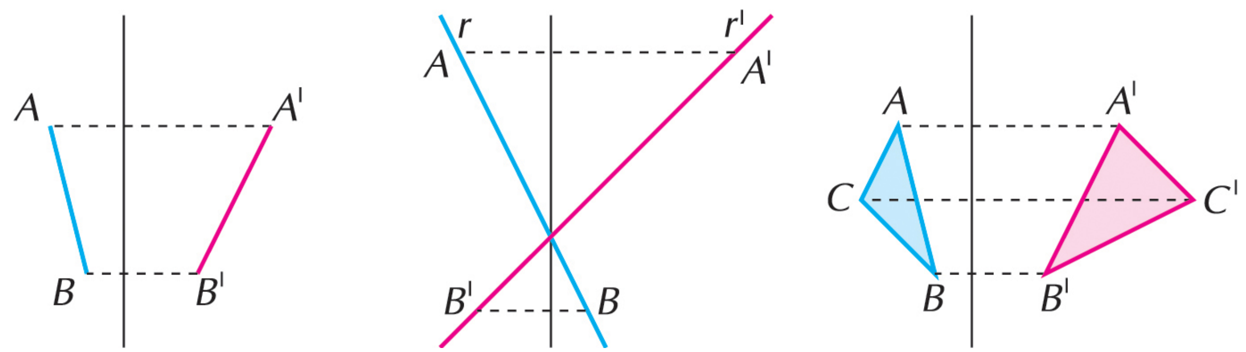
Si chiama **trasformazione geometrica** ogni corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano.

Essa viene determinata assegnando una legge (una funzione) che indica il modo in cui i punti si corrispondono.

Per indicare che un elemento *a'* è il corrispondente di un elemento *a* in una trasformazione geometrica si scrive

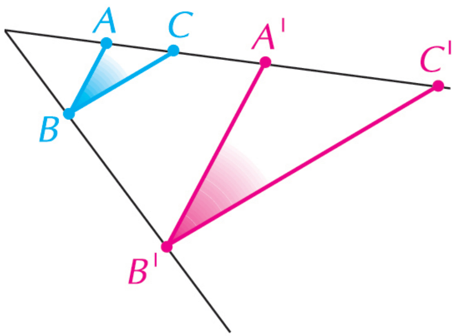
$$a' = f(a)$$



Si dice **invariante** di una trasformazione geometrica qualunque caratteristica che si conserva nella trasformazione.

Esempio:

Nella seguente trasformazione si conservano le ampiezze degli angoli.



Si dicono **elementi uniti** di una trasformazione geometrica gli elementi del piano che hanno per trasformati se stessi.

Se tutti i punti sono uniti la trasformazione prende il nome di **identità**.

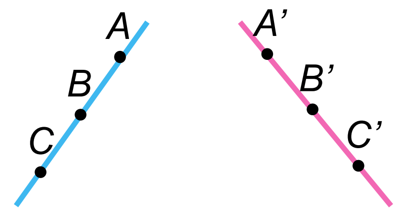
Si dice **involutoria** una trasformazione che, applicata due volte, coincide con la trasformazione identica, cioè una trasformazione che, applicata due volte, fa tornare ogni elemento su se stesso.

Le isometrie nel piano

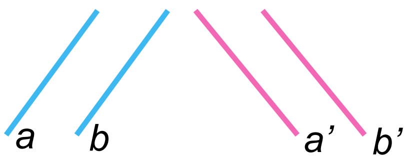
Si dice **isometria** la trasformazione geometrica che ad ogni coppia di punti *A* e *B* di un piano associa i punti *A'* e *B'* dello stesso piano in modo che il segmento *AB* sia congruente al segmento *A'B'.*

Un'isometria:

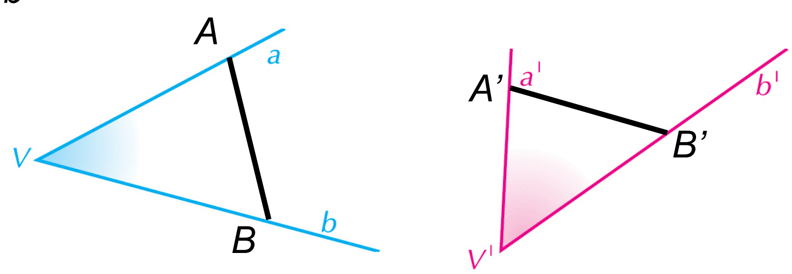
- conserva l'allineamento dei punti



- conserva il parallelismo

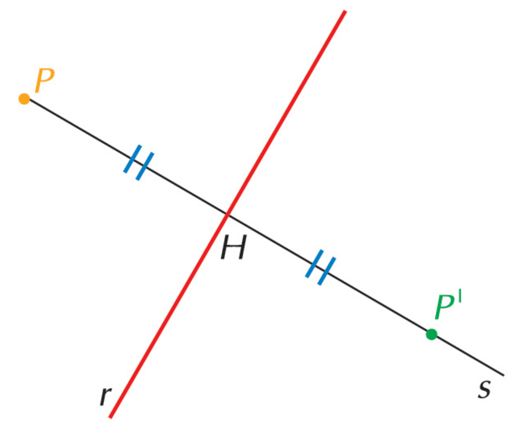


- conserva l'ampiezza degli angoli

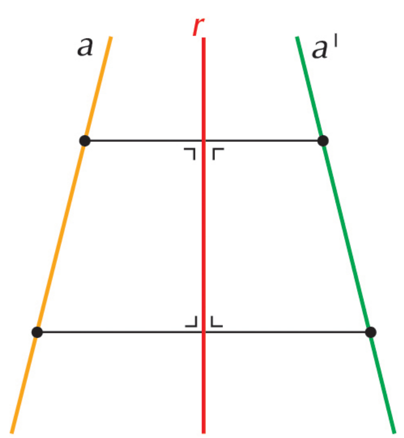


Due figure isometriche sono congruenti e, viceversa, se due figure sono congruenti esiste un'isometria nella quale le due figure si corrispondono.

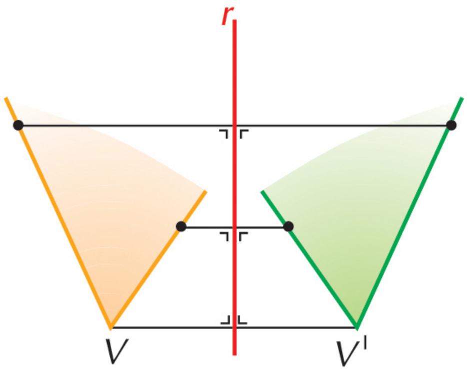
Si dice **simmetria assiale** la trasformazione che, data una retta *r*, associa ad ogni punto *P* del piano il suo simmetrico rispetto a *r*.



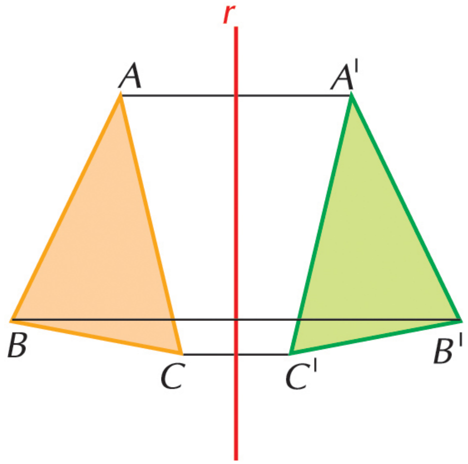
Esempi



Per trovare la simmetrica di una retta *a* basta trasformare due punti di *a* e disegnare la retta *a'* che passa per i punti trasformati.



Per trovare il simmetrico di un angolo basta trovare i simmetrici di due punti, uno su ciascun lato dell'angolo, e del vertice.



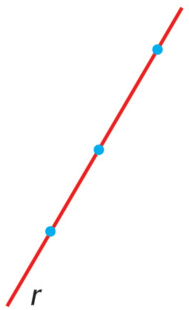
Per trovare il simmetrico di un triangolo, basta trovare i simmetrici dei suoi vertici.

La simmetria assiale, come tutte le trasformazioni, è una funzione e si indica con il simbolo σ_r dove r è l'asse di simmetria. Per indicare che un elemento G del piano è associato a un elemento G' nella simmetria di asse r scriveremo

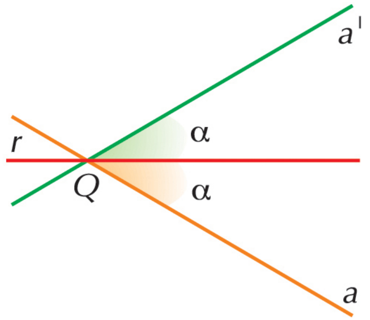
$$G = \sigma_r(G)$$

La simmetria assiale è un'isometria → due figure che si corrispondono in una simmetria assiale sono congruenti.

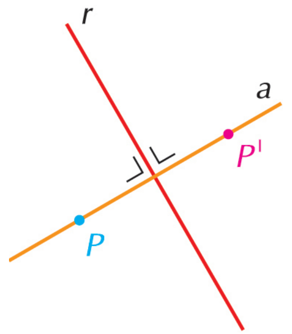
La simmetria assiale gode di tutte le proprietà delle isometrie e in più:



- i punti che appartengono all'asse di simmetria sono punti uniti perché hanno per trasformati se stessi.

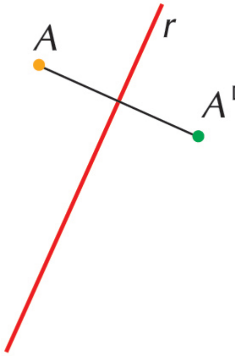


- una retta *a* incidente in un punto *Q* all'asse di simmetria e che forma un angolo *α* con tale asse ha per trasformata una retta a' che passa ancora per *Q* e che forma con l'asse di simmetria un angolo congruente ad *α*.

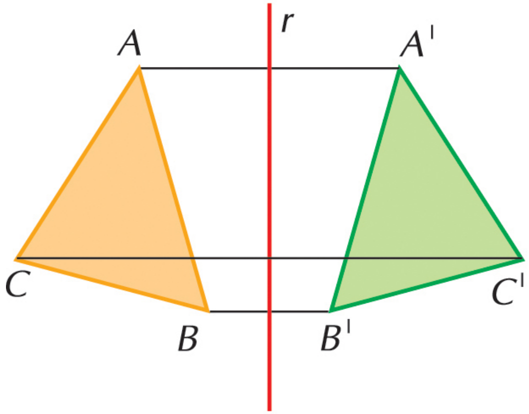


- una retta a perpendicolare all'asse di simmetria ha per trasformata se stessa ed è quindi una retta unita; non è però retta di punti uniti.

- è una trasformazione involutoria.

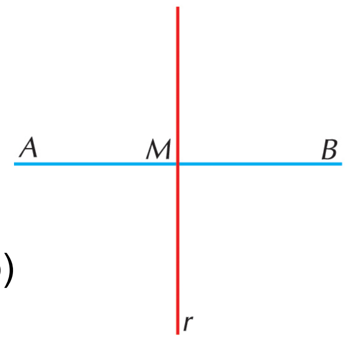


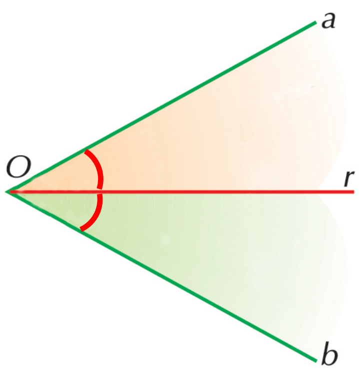
- non conserva l'ordinamento dei punti.



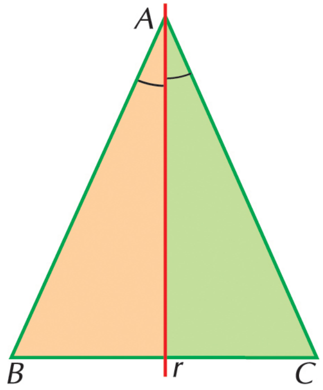
Una figura *F* possiede un **asse di simmetria** *r* se è unita rispetto alla simmetria di asse *r*.

Figure con assi di simmetria:

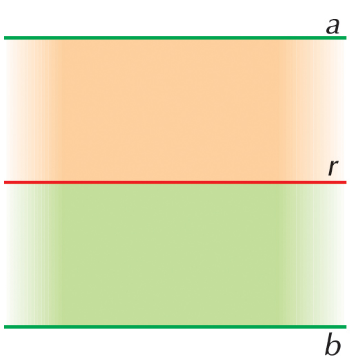




- **segmento** (asse: asse del segmento)
- **angolo** (asse: bisettrice)

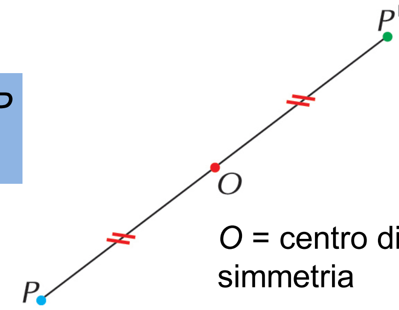


- **triangolo isoscele** (asse: bisettrice angolo al vertice)



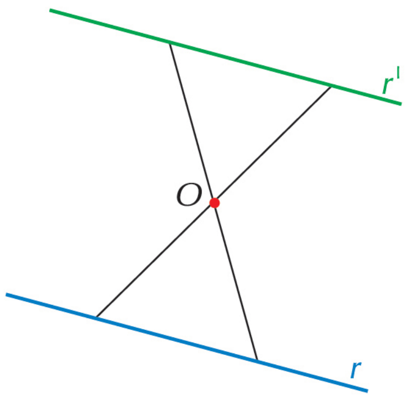
- **striscia** (asse: retta parallela ad *a* e *b* equidistante da *a* e *b*)

Si dice **simmetria centrale** di centro *O* la trasformazione che ad ogni punto *P* del piano associa il suo simmetrico *P'* rispetto ad *O*.

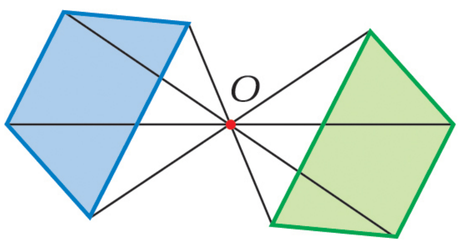


O = centro di simmetria

Esempi



- Costruiamo la simmetrica di una retta *r* rispetto al centro *O*.



- Costruiamo il simmetrico di un poligono rispetto al centro O.

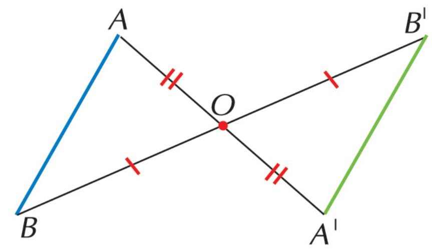
La simmetria centrale si indica con il simbolo σ_O dove *O* è il centro di simmetria; per indicare che un elemento *G'* del piano è associato ad un elemento *G* nella simmetria di centro O scriveremo

$$G' = \sigma_O(G)$$

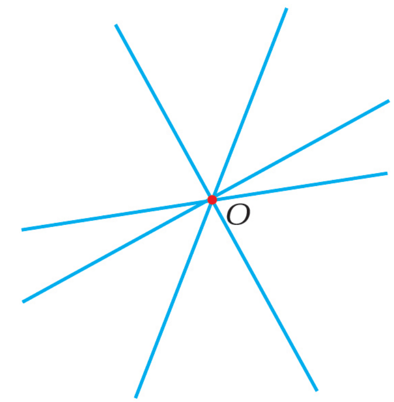
La simmetria centrale è un'isometria $\longrightarrow$ due figure simmetriche rispetto a un punto sono congruenti.

Proprietà della simmetria centrale

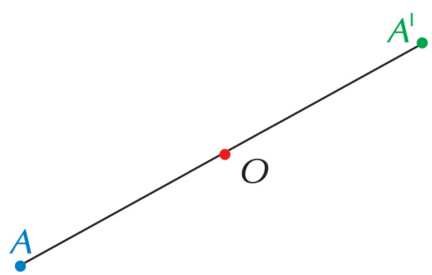
- Due segmenti o due rette corrispondenti sono paralleli



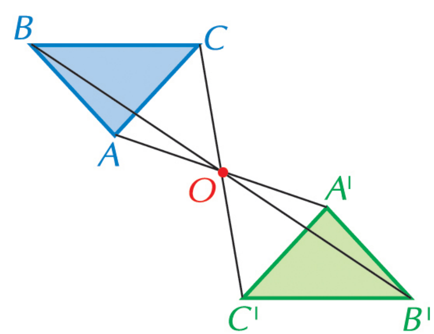
- L'unico punto unito è il centro di simmetria



- Le rette passanti per il centro sono unite, ma non sono rette di punti uniti



- È una trasformazione involutoria



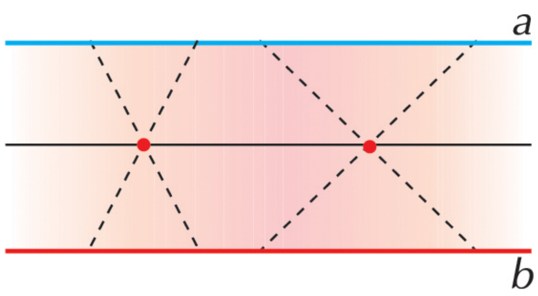
- Conserva l'ordinamento dei punti

Una figura *F* ha un **centro di simmetria** se è unita nella simmetria che ha centro in quel punto.

Figure con centro di simmetria:

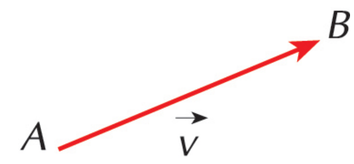
- **segmento** (centro: punto medio)

- **striscia** (centro: qualunque punto dell'asse di simmetria)



Un segmento orientato si dice vettore e viene indicato con i simboli

$$\overrightarrow{AB} \qquad \vec{v}$$

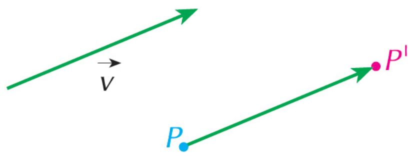


Per individuare un vettore nel piano occorre indicare:

- la sua **direzione**, cioè la retta cui appartiene
- il suo **verso**, che indica il senso di percorrenza
- la sua **intensità** o **modulo**, che rappresenta la lunghezza del segmento

Vettori equipollenti: vettori con la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa intensità.

Dato un vettore $\vec{v}$, ad ogni punto *P* del piano si può associare un punto *P'* in modo che $\overrightarrow{PP}$ sia equipollente a $\vec{v}$. Il punto *P'* si dice **traslato** del punto *P*.

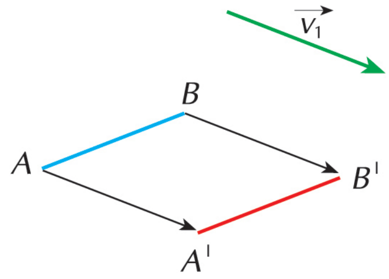


$\vec{v}$: vettore di traslazione

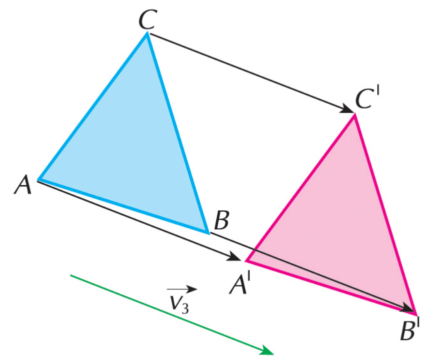
Si dice **traslazione** di vettore $\vec{V}$ la trasformazione che ad ogni punto *P* del piano associa il suo traslato *P'* mediante vettore $\vec{V}$.

Esempi:

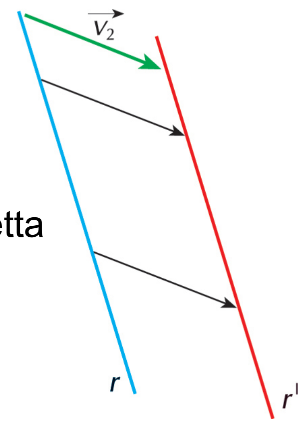
• Figura traslata di un segmento



• Figura traslata di un triangolo



• Figura traslata di una retta



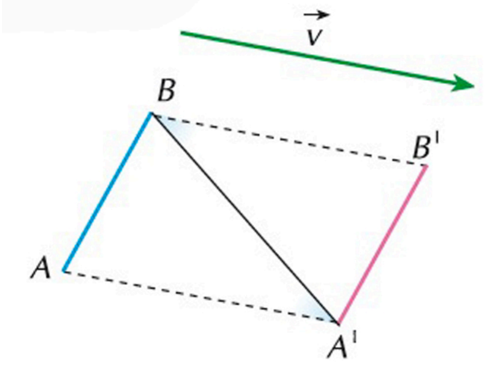
La traslazione si indica con il simbolo $\tau_{\vec{V}}$, scrivendo in basso a destra del simbolo τ il vettore $\vec{V}$ di traslazione. Per indicare che una figura *G'* è associata ad una figura *G* nella traslazione di vettore $\vec{V}$ scriveremo

$$G' = \tau_{\vec{V}}(G)$$

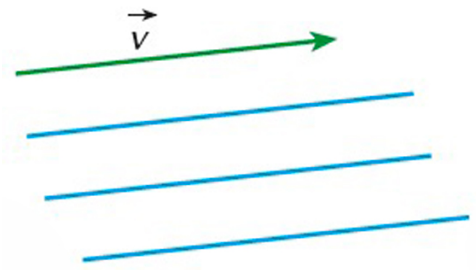
La traslazione è un'isometria.

Proprietà della traslazione

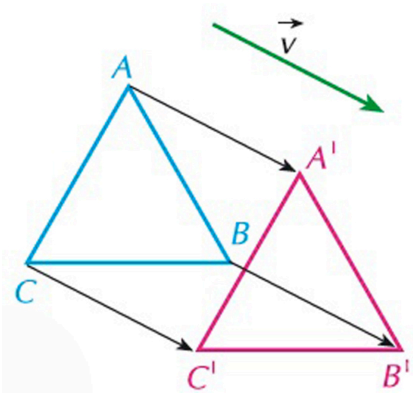
- conserva il parallelismo



- non ci sono punti uniti

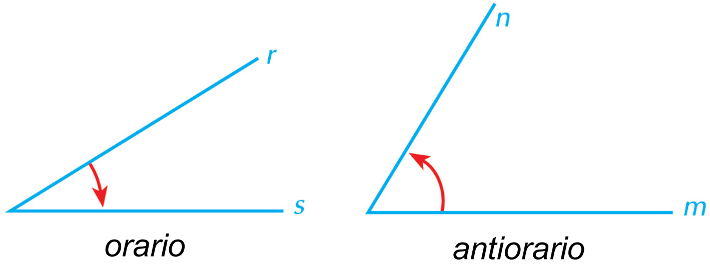


- le rette che hanno la stessa direzione del vettore di traslazione sono unite

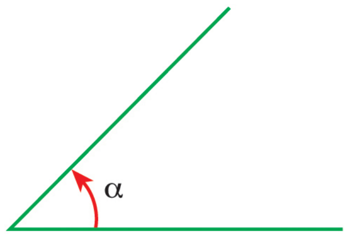


- conserva l'ordinamento dei punti

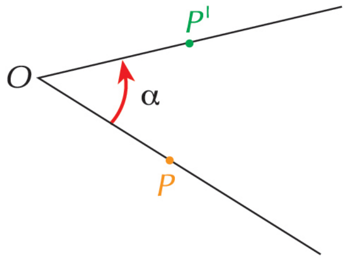
Un angolo può essere orientato in senso orario o antiorario



Si dice **rotazione di centro *O* e ampiezza *α*** la trasformazione che ad ogni punto *P* del piano associa il punto *P'* ruotato di P rispetto ad *O* di un angolo orientato *α*.



O: centro di rotazione
α: ampiezza della rotazione



La rotazione di centro *O* e ampiezza α si indica con il simbolo $\rho_{O,\alpha}$ scrivendo come indici in basso a destra del simbolo ρ il centro e l'angolo di rotazione; per indicare che una figura *G'* è associata ad una figura *G* nella rotazione di centro *O* e ampiezza α scriveremo

La rotazione è un'isometria.

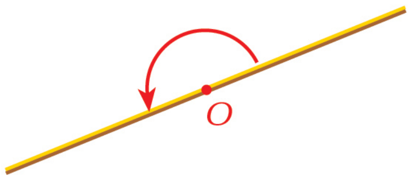
$$G' = \rho_{O,\alpha}(G)$$

Proprietà della rotazione

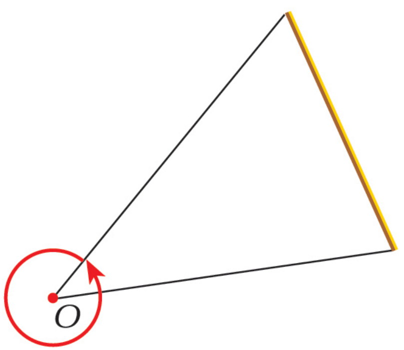
La rotazione gode di tutte le proprietà delle isometrie e in più:

- l'unico punto unito è il centro di rotazione

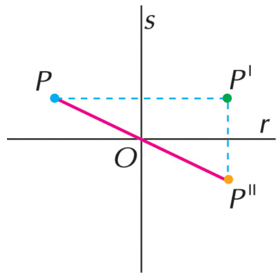
- le uniche rette unite sono quelle che si corrispondono in una rotazione di ampiezza pari ad un angolo piatto o ad un suo multiplo e che passano per il centro di rotazione.



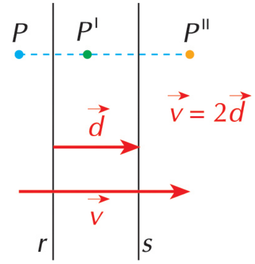
- la rotazione di ampiezza pari ad un angolo giro coincide con la trasformazione identica.



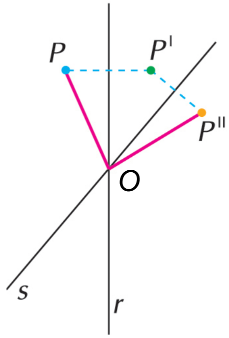
Applicando in successione due isometrie si ottiene ancora un'isomeria, in particolare:



- Il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari è una simmetria centrale avente centro nel punto di intersezione con gli assi.

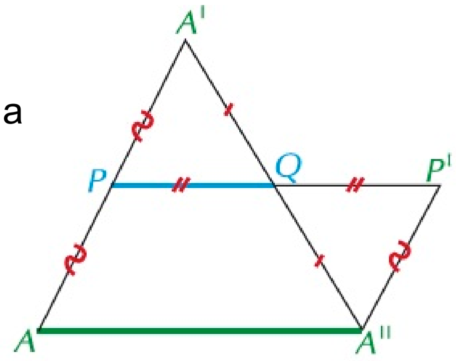


- Il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi paralleli è una traslazione di vettore doppio della distanza fra i due assi e direzione e verso dal primo al secondo asse.

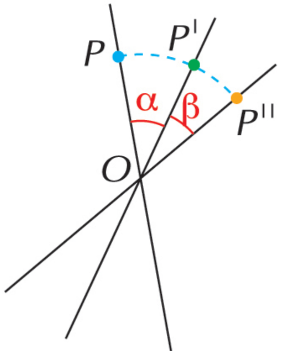


- Il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi incidenti è una rotazione di ampiezza uguale al doppio dell'angolo formato dai due assi, centro nel punto di intersezione degli assi e verso dal primo al secondo asse.

- Il prodotto di due simmetrie centrali è una traslazione di vettore doppio della distanza fra i centri e direzione e verso dal primo al secondo centro.



- Il prodotto di due rotazioni di ampiezza α e β e aventi lo stesso centro è una rotazione dello stesso centro e di ampiezza α + β.



La simmetria assiale svolge un ruolo molto importante nell'insieme delle isometrie. Infatti:

- una simmetria centrale si può vedere come prodotto di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari
- una traslazione si può vedere come prodotto di due simmetrie assiali con gli assi paralleli
- una rotazione si può vedere come prodotto di due simmetrie assiali con gli assi incidenti.

Vale inoltre il teorema

Teorema. Ogni isometria si può ottenere mediante il prodotto di al più tre simmetrie assiali.