La equazioni parametriche

Un'equazione dicesi parametrica se, oltre all'incognita, vi figura anche un'altra lettera <parametro>. Naturalmente le radici dipendono dai valori che si attribuiscono al parametro.

Ad esempio, la seguente equazione è parametrica ed il parametro è k:

$$\boldsymbol{x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0}$$

Dire per quali valori del parametro k si verifica una delle seguenti condizioni:

a) Le radici sono uguali............................ $\Delta = 0$

b) Le radici sono opposte....................................... $-\frac{b}{a} = 0$

c) Una radice è nulla.................................. $\frac{c}{a} = 0$

d) Le radici sono tra loro reciproche............................ $\frac{c}{a} = 1$

e) Una radice è uguale a 2.......................Sostituire ad x...2

f) La somma delle radici è 5....................................$-\frac{b}{a} = 5$

g) La somma dei quadrati delle radici è 7........... $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = 7$

h) La somma degli inversi delle radici è 9........... $\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 9$

<u>Risposta al quesito "a": le radici sono uguali</u>

$$\boldsymbol{x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0}$$

Affinché le radici siano uguali, affinché sia X1=X2 deve essere:

$$\Delta = 0$$

Quindi: $(k+1)^2 - 1 = 0;$ $\boldsymbol{k^2 + 2k + 1 - 1 = 0};$

$$k^2 + 2k = 0; \quad k(k+2) = 0; \quad k = 0 \quad k = -2$$

Poiché questa uguaglianza è verificata per k=0 e per k=-2, si concluderà che per questi valori le radici X1 e X2 sono uguali.

*** Verifichiamo ciò che si è detto sostituendo nell'equazione proposta una volta il valore k=0 e un'altra il valore k=-2 e risolviamo quindi le due equazioni; entrambe dovranno avere le radici coincidenti.

Infatti per k = 0 l'equazione proposta diviene:

$x^2 - 2\,(0 + 1)x + 1 = 0;$ $\qquad$ $x^2 - 2x + 1 = 0;$

Che risolta dà: X1 = X2 =1

Per k = -2 l'equazione proposta diviene:

$x^2\ -\ 2\,(-2 + 1)x + 1 = 0;$ $\qquad$ $x^2 + 2x + 1 = 0$

Che risolta dà: X1 = X2 = -1

Risposta al quesito "b": le radici sono opposte

$$\boldsymbol{x^2 - 2(k + 1)x + 1 = 0}$$

Affinché le radici siano opposte, affinché sia $x_1 = -x_2$ e quindi $x_1 + x_2 = 0$

deve essere: $-\frac{b}{a} = 0$

Perciò abbiamo: $2(k + 1) =\ 0;$ $\qquad$ $2k + 2 = 0;$

$k =\ -\ \frac{2}{2};$ $\qquad$ $k =\ -1$

K = - 1 è pertanto il valore per il quale le radici sono opposte.

*** Verifichiamo sostituendo nell'equazione data il valore k = -1; si ottiene:

$x^2 - 2(-1 + 1)x + 1 = 0;$ $\qquad$ $x^2 - 0x + 1 = 0;$ $\qquad$ $x^2 + 1 = 0$

Che risolto dà le radici opposte: $x_1 = i \quad e \ \ x_2 =\ -i$

Risposta al quesito “c”: una radice è nulla

$$x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0$$

Affinché una radice sia nulla, e cioè sia:

$x_1 = 0$ e quindi: $x_1 \,.\, x_2 = 0$ deve essere: $\frac{c}{a} = 0$ e perciò 1 = 0

Poiché questa condizione non è mai verificata, l’equazione data non potrà avere radici nulle per nessun valore attribuito al parametro k.

Risposta al quesito “d”: le radici sono fra loro reciproche

$$x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0$$

Affinché le radici siano reciproche tra loro, cioè sia:

$x_1 = \frac{1}{x_2}$ e quindi: $x_1 \,.\, x_2 = 1$ deve essere: $\frac{c}{a} = 1$

e perciò nel nostro caso: $\frac{1}{1} = 1$

Poiché quest’uguaglianza è un’identità, si concluderà che per ogni valore di k le radici sono tra loro reciproche

Risposta al quesito “e”: una radice è uguale a 2

$$x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0$$

- Affinché una radice sia uguale a 2 è necessario che l’uguaglianza rappresentata dall’equazione sia soddisfatta attribuendo ad X questo valore;

- si troverà, quindi, per quali valori di K una radice è uguale a 2 sostituendo ad X, nell’equazione, il valore numerico 2 e risolvendo l’equazione in K così ottenuta:

$$4 - 2(k+1)\cdot 2 + 1 = 0; \qquad k = \frac{1}{4}$$

- Per verificare che il valore $k = \frac{1}{4}$ soddisfa ciò che è stato richiesto, si sostituisca questo valore nell’equazione proposta e si risolva l’equazione ottenuta: una delle radici dovrà essere uguale a 2. Infatti:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0; \qquad 2x^2 - 5x + 2 = 0; \qquad x_1 = 2 \quad e \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Risposta al quesito "f": la somma delle radici è 5

$$\boldsymbol{x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0}$$

- Affinché la somma delle radici sia 5, cioè X1 + X2 = 5 deve essere: $-\frac{b}{a} = 5$

e quindi: $2(k+1) = 5; \qquad k = \frac{3}{2}$

*** Verifichiamo che per $k = \frac{3}{2}$ le radici dell'equazione proposta hanno per somma 5 (3 + 2 . . . numeratore + denominatore della frazione) sostituendo tale valore nell'equazione parametrica e risolvendo l'equazione numerica si ottiene:

$$x^2 - 5x + 1 = 0; \qquad x_1 = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

E quindi: $x_1 + x_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2} + \frac{5+\sqrt{21}}{2} = 5$

Risposta al quesito "g": la somma dei quadrati delle radici è 7

$$\boldsymbol{x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0}$$

- Affinché la somma dei quadrati delle radici sia 7, cioè sia. . .

$x_1^2 + x_2^2 = 7$ o anche $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 7$

deve essere: $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = 7$ e quindi: $4(k+1)^2 - 2 = 7;$

$$4k^2 + 8k + 4 - 2 - 7 = 0; \qquad 4k^2 + 8k - 5 = 0$$

dall'ultima equazione in k si ottiene che i valori del parametro che soddisfano la condizione richiesta sono:

$$k = \frac{1}{2} \quad e \quad k = -\frac{5}{2}$$

*** Verifichiamo queste conclusioni:

Per $k = \frac{1}{2}$ l'equazione proposta diventa: $x^2 - 3x + 1 = 0$

risolvendo troviamo le soluzioni: $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

la somma delle radici è:

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9-6\sqrt{5}+5}{4} + \frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

per $k = -\frac{5}{2}$ l'equazione proposta diventa: $x^2 + 3x + 1 = 0$

risolvendola troviamo le soluzioni:

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

la somma dei quadrati delle quali è:

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} + \frac{9-6\sqrt{5}+5}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

Risposta al quesito "h": la somma degli inversi delle radici è 9

$$\boldsymbol{x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0}$$

- Affinché la somma degli inversi delle radici sia 9, cioè sia:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 9 \ e\ quindi: \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 9 \text{ deve essere: } \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 9$$

E perciò: $2(k+1) = 9; \quad k = \frac{7}{2}$

*** Verifichiamo che per $k = \frac{7}{2}$ la somma degli inversi delle radici sia 9:

$$x^2 - 9x + 1 = 0; \qquad x_1 = \frac{9 - \sqrt{77}}{2} \;\; e \;\; x_2 = \frac{9 + \sqrt{77}}{2}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{9 - \sqrt{77}} + \frac{2}{9 + \sqrt{77}} = \frac{18 + 2\sqrt{77} + 18 - 2\sqrt{77}}{\left(9 - \sqrt{77}\right)(9 + \sqrt{77})} = \frac{36}{4} = 9$$