

4 Gli insiemi

1/CON GLI INSIEMI ALLA SCOPERTA DEL NUMERO

Osservate le illustrazioni riportate nella pagina: le parole che usereste per descriverle sarebbero certamente queste: un gregge di pecore, una collezione di francobolli, una squadra di calcio.



I termini gregge, collezione, squadra, indicano ciascuno un *insieme* di oggetti qualsiasi.

Questo concetto di **insieme**, inteso come raggruppamento, collezione, classe o famiglia di oggetti è molto importante in matematica: ci permetterà di ripercorrere il lungo cammino fatto dall'uomo per giungere alla scoperta del **numero**.

Cerchiamo per un momento di immaginare come poteva fare l'uomo quando la matematica non esisteva affatto, per controllare per esempio se le pecore del gregge c'erano tutte. Probabilmente adottava questo accorgimento: quando le pecore uscivano per il pascolo le faceva passare per uno stretto passaggio una dopo l'altra e in corrispondenza a ogni pecora lasciava cadere un sassolino formando un mucchio (o segnava una tacca, cioè un'incisione, su di un albero). Se al ritorno l'ultima pecora passava quando veniva lasciato cadere l'ultimo sasso del medesimo



mucchio (o controllata l'ultima tacca), allora le pecore c'erano tutte.

Il nostro pastore aveva istituito tra le pecore e i sassolini quella che oggi chiamiamo *corrispondenza uno a uno* (o, come vedremo meglio nel capitolo seguente, *corrispondenza biunivoca*).

Essa consiste nell'associare a ogni oggetto di uno dei due insiemi (il gregge per esempio) un oggetto dell'altro insieme (mucchio di sassolini), finché entrambi gli insiemi sono esauriti.

Il numero cardinale

Notate che questo sistema non è certamente quello del contare ma gli è molto vicino. L'uomo primitivo non poteva dire *quante* erano le pecore del gregge, ma poteva indicare *al posto delle pecore* un mucchietto di sassolini; poteva stabilire che c'erano tutte, perché egli sapeva in pratica che le pecore del gregge erano *tante quante* i sassolini.

Un mucchietto di sassolini e un gregge sono cose completamente diverse e occorre un «colpo di genio» per individuare e riconoscere che nei due insiemi c'è una stessa caratteristica.

In fondo, se ci chiediamo che cosa hanno in comune due cani e due elicotteri, non ci capita di pensare subito al fatto che gli uni sono tanti quanti gli altri (o che entrambi sono una coppia)! In questo caso esprimiamo con parole la caratteristica comune con il numero «due» e la

indichiamo col segno «2». Oggi siamo in grado di associare sempre un numero alla caratteristica, comune a due o più insiemi, di avere l'uno tanti elementi quanti ne hanno gli altri.

Senza saperlo, l'uomo creò quindi degli insiemi che potevano stare al posto di altri, cioè degli **insiemi modello**, come il mucchietto di sassolini per le pecore. Anzi egli li trovò nella natura; le ali di un uccello possono raffigurare la coppia, cioè il numero 2; le dita di una mano, il numero 5; le foglie di un trifoglio il numero 3 e così via.

Il numero di cui abbiamo parlato finora si chiama **numero cardinale**; esso si basa sul principio di questa corrispondenza tra insiemi, ma per l'uomo primitivo non implicava ancora il contare.

Per realizzare quest'ultimo procedimento bisognava escogitare un sistema di numerazione: il nostro insieme di modelli



doveva essere disposto in una successione ordinata che procedesse in senso crescente.

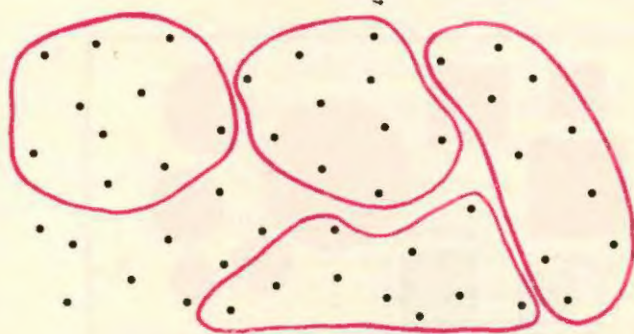


Si raggiunse così la cosiddetta successione naturale 1, 2, 3, 4, ... e si poté passare da un numero qualsiasi al suo successivo, aggiungendo 1. Creato questo sistema, non vi fu più bisogno di un insieme modello, come il mucchietto di sassolini, per determinare la quantità degli elementi di un gregge. Si poteva contare direttamente, facendo corrispondere a ogni pecora un numero della successione crescente dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, ... fino a che l'insieme delle pecore fosse esaurito. L'ultima parola (presa nella successione uno, due, tre, ...) è il numero da assegnare all'intero gruppo di pecore. Nel caso del nostro esempio saremmo arrivati al numero 9.

Come fece l'uomo per contare, per esempio, insiemi sempre più numerosi? Come abbiamo visto esaminando il sistema di numerazione decimale, l'uomo formò insiemi più piccoli, raggruppando per dieci.

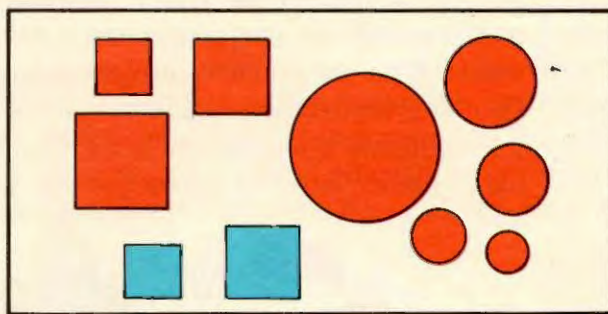
Contò i gruppi di dieci e disse: «quattro gruppi di dieci puntini e avanzano nove puntini».

E scrisse: **49**.



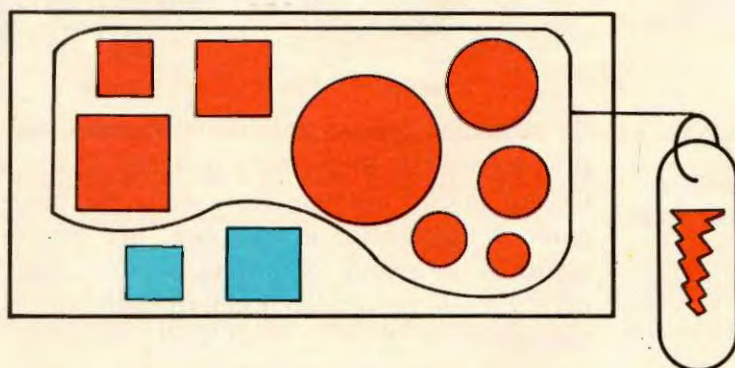
2/LE RAPPRESENTAZIONI DI UN INSIEME

Nel paragrafo precedente avete imparato che **un insieme è una collezione di oggetti**. Poiché più avanti ci capiterà di operare con insiemi (per lo più di numeri), è opportuno approfondire meglio questo concetto. A questo scopo consideriamo per esempio una scatola in cui vi sono tanti gettoni di varia forma e colore.

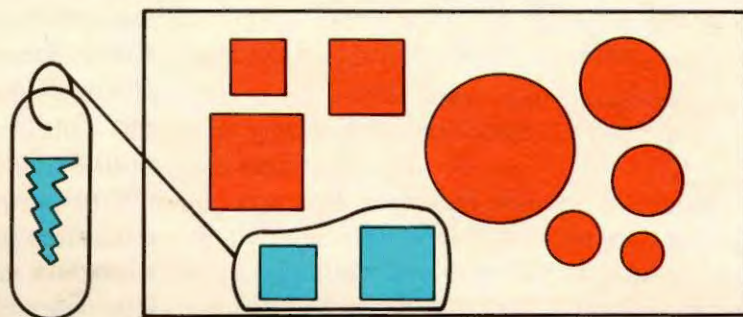


Parliamo di questi oggetti: alcuni hanno la stessa forma, altri hanno lo stesso colore.

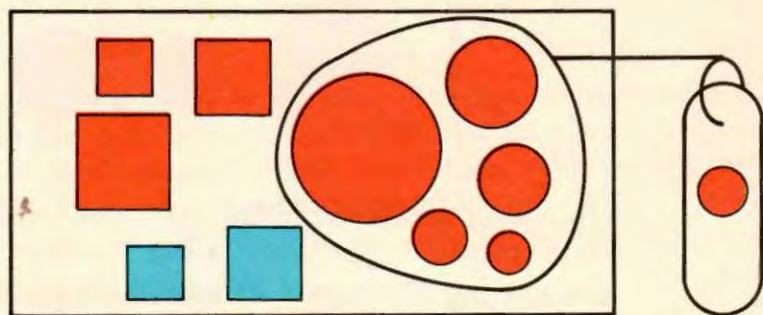
Se pensiamo alla caratteristica «avere colore rosso», possiamo raggruppare gli oggetti rossi entro una linea chiusa e applicare una etichetta con un segno rosso, proprio come fanno i negozianti per catalogare gli oggetti dello stesso tipo e per poterli facilmente ritrovare.



Se consideriamo la caratteristica «avere colore blu» possiamo raggruppare gli oggetti che hanno questo attributo comune e etichettarli.



Pensiamo ad altri attributi, come per esempio «essere rosso e avere forma circolare»; il raggruppamento che formiamo appare qui accanto.

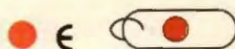


Comprensione

I raggruppamenti che abbiamo formato assegnando ogni volta un particolare attributo li chiamiamo **insiemi**: insieme dei gettoni rossi, insieme dei gettoni blu, insieme dei gettoni circolari rossi...

Gli oggetti di ogni insieme si dicono elementi; per esempio l'elemento  appartiene all'insieme 

In simboli, scriviamo:



il segno $\in$ significa «**appartiene a**»; potete leggere l'espressione precedente così: «*l'oggetto circolare rosso appartiene all'insieme degli oggetti rossi che hanno forma circolare*».

€
appartiene

Se indichiamo con a il gettone  e con A l'insieme  possiamo anche scrivere

$$a \in A$$

e leggiamo « a appartiene ad A ».

Dagli esempi precedenti vi sarete accorti che si può definire un insieme mediante una frase, ad esempio: «L'insieme degli oggetti della scatola che hanno colore rosso», «l'insieme degli oggetti della scatola che hanno colore blu», «L'insieme degli oggetti della scatola che hanno colore rosso e forma circolare». Tutti i gettoni di cui ci occupiamo appartengono essi stessi ad un insieme: «L'insieme di tutti gli oggetti che stanno dentro la scatola».

Quando un insieme è definito mediante una frase si dice che l'insieme è definito per comprensione.

State attenti però: la frase deve permettere di stabilire *senza dubbi* se un elemento appartiene o non appartiene all'insieme. Frasi come «i ragazzi alti della I^a A» oppure «le ragazze simpatiche della III^a C» non indicano degli insiemi perché non danno criteri concreti, oggettivi per dire chi appartiene all'insieme e chi no.

Estensione

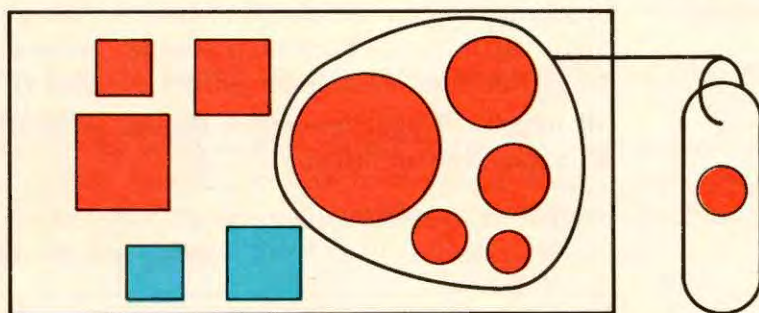
Un altro modo per definire un insieme è quello di elencare a uno a uno tutti gli elementi; per esempio l'insieme degli oggetti rossi aventi forma circolare, definito prima, può essere rappresentato così:



Quando di un insieme si elencano a uno a uno gli elementi, si usano queste parentesi $\{ \}$ e dentro a esse si scrivono gli elementi dell'insieme.

Quando cioè l'insieme è definito mediante l'elencazione dei suoi elementi, si dice che esso è definito per estensione.

Consideriamo l'insieme contraddistinto dal cartellino e che indicheremo con la lettera A



Certamente non si può dire che l'elemento ■ appartiene all'insieme A perché gli elementi dell'insieme considerato sono rossi e hanno forma circolare. In simboli:

$$\blacksquare \notin A$$

che si legge: il quadrato ■ **non appartiene** all'insieme A . Il simbolo $\notin$ significa «non appartiene a».

Possiamo indicare con una lettera, ad esempio la lettera b , anche l'elemento ■ e allora si scriverà

$$b \notin A$$

e si legge « b non appartiene ad A ».

In generale indicheremo gli insiemi con lettere maiuscole; se vorremo indicare con lettere anche gli elementi dell'insieme useremo invece lettere minuscole.

Vediamo alcuni esempi:

1 B è l'insieme delle cifre necessarie per scrivere i numeri in base 10

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

avremo che $3 \in B$ $10 \notin B$ $0 \in B$ $11 \notin B$

$\notin$
non appartiene

2 C è l'insieme delle lettere dell'alfabeto latino

$$C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, z\}$$

avremo che $c \in C$ $y \notin C$ $k \notin C$ $h \in C$

3 D è l'insieme delle lettere della parola RIPARTIRE

$$D = \{a, e, i, p, r, t\}$$

Osservate che abbiamo scritto una sola volta, come elementi dell'insieme, ciascuna delle lettere che compaiono nella parola fissata, anche se nella parola alcune lettere sono ripetute più volte. Infatti, per quanto riguarda l'insieme, ci interessa solamente sapere se un certo elemento, in questo caso una certa lettera, sta o non sta nell'insieme.

4 E è l'insieme delle cifre del numero 343774

$$E = \{3, 4, 7\}$$

Osserviamo che anche i numeri naturali costituiscono un insieme che viene indicato con la lettera N .

N è l'insieme dei numeri naturali

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$$

i puntini stanno ad indicare che la elencazione degli elementi non è finita. Non potremo mai infatti scrivere tutti i numeri naturali perché sono infiniti. Potremo dunque scrivere ad esempio che

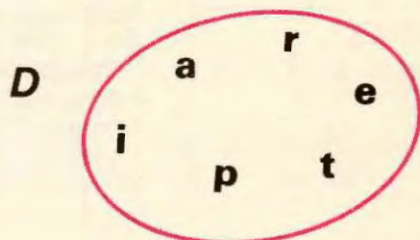
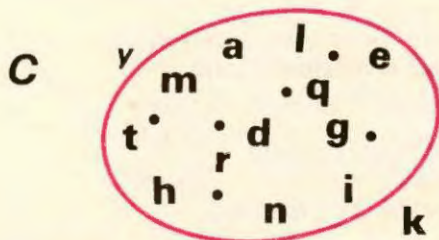
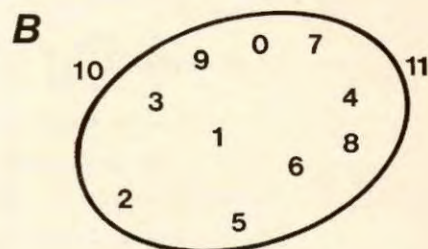
$$10326 \in N \quad 12,5 \notin N \quad 41 \in N \quad -3 \notin N \quad 7 \in N$$

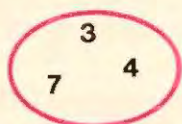
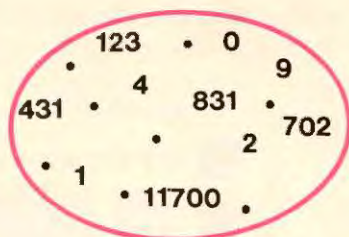
Diagrammi di Venn

Possiamo rappresentare gli insiemi anche graficamente.

Si disegna una linea chiusa: questa linea rappresenta la separazione tra gli elementi che appartengono all'insieme (che vengono indicati all'interno della linea), e quelli che non vi appartengono (che vengono eventualmente indicati all'esterno).

Questo tipo di rappresentazione prende il nome di **diagramma di Eulero-Venn**. Spesso lo indicheremo con un nome solo, dicendo semplicemente **diagramma di Venn**.



E**N**

Osservate che anche nel diagramma di Venn, come nella scrittura per estensione, non sempre possiamo indicare tutti gli elementi dell'insieme, o perché sono infiniti, oppure perché sono comunque tanti. In questo caso abbiamo indicato con qualche punto all'interno della linea il fatto che gli elementi segnati non esauriscono l'insieme.

Esercizi di verifica

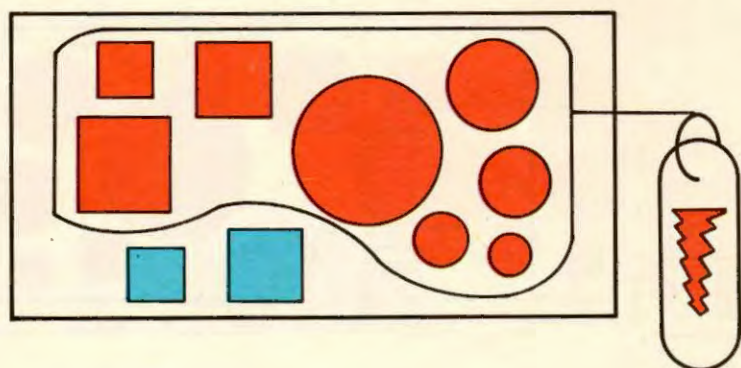
1. Scrivete **per estensione** i seguenti insiemi
L'insieme dei numeri naturali minori di 7.
L'insieme dei capoluoghi di provincia del Piemonte.
L'insieme dei numeri naturali maggiori di cinque e minori di 17.
2. Scrivete **per comprensione** i seguenti insiemi:
 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 $B = \{2, 3, 4, 5\}$
 $C = \{\text{Torino, Alessandria, Asti, Cuneo, Novara, Vercelli}\}$
 $D = \{\text{primavera, estate, autunno, inverno}\}$
3. Fate una rappresentazione con un diagramma di Venn dei precedenti insiemi.
4. Considerate la seguente rappresentazione e sostituite ai puntini il simbolo $\in$ oppure $\notin$



5. Dite se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa
 $5 \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ $4 \notin \{4, 6, 8\}$
 $5 \notin \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $12 \in \{7, 3, 12, 5\}$
6. Scrivete il giusto segno al posto dei puntini
 $2 \dots \{2, 3, 4, 5\}$; $1 \dots \{1\}$; $0 \dots \{0\}$; $35 \dots \{7, 6, 5, 4\}$; $19 \dots \{1, 9\}$.
7. Indicate quali delle seguenti frasi individuano per comprensione un insieme e quali no:
 Gli oggetti piccoli che stanno nella vostra cartella.
 I libri di testo che stanno nella vostra cartella.
 I numeri che finiscono con la cifra 0.
 I numeri grandi.
 I simboli usati nella numerazione romana.
 Gli alunni della vostra classe.
 Gli alunni della classe I^a dell'anno prossimo.

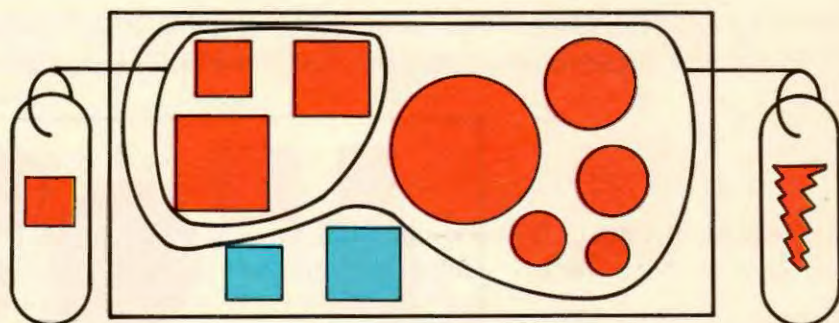
3/CONFRONTIAMO GLI INSIEMI

Consideriamo l'insieme degli oggetti rossi della nostra scatola.



Inclusione

Se ora aggiungiamo l'attributo «a forma quadrata» abbiamo creato un altro insieme: quello degli oggetti rossi a forma quadrata.



Tale insieme è **contenuto** in quello degli oggetti rossi: ogni elemento del primo insieme è anche elemento del secondo; scriviamo:



e leggiamo «l'insieme dei quadrati rossi è **incluso** nell'insieme degli oggetti rossi».

Il segno $\subset$ si legge «è **incluso in**» oppure «è **contenuto in**».

$\subset$
incluso

Sottoinsieme

Indicando con A l'insieme
potremo scrivere



e con B l'insieme



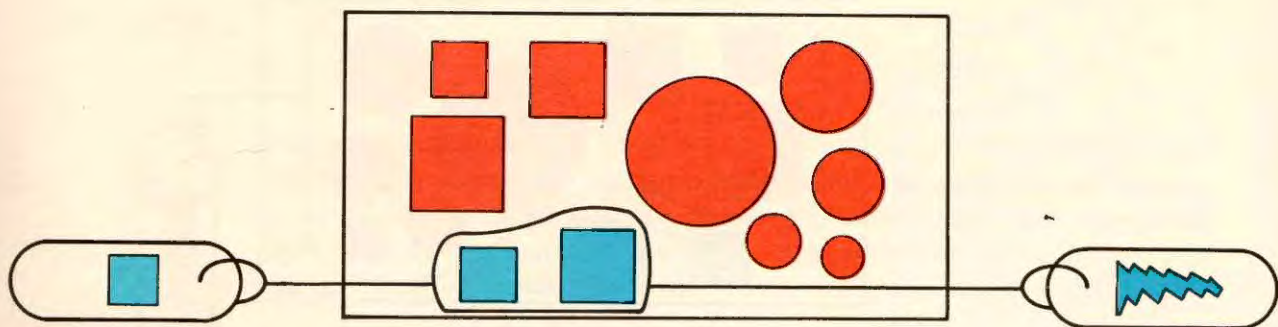
$A \subset B$ e leggere « A è incluso in B ».

Ciò vuol dire che ogni elemento di A appartiene anche a B . A è una parte di B : si dice che A è un sottoinsieme di B .

Ad esempio, l'insieme B dei gettoni rossi è un sottoinsieme dell'insieme dei gettoni della scatola. Indicando quest'ultimo con I scriveremo

$B \subset I$

Consideriamo ora l'insieme C dei gettoni blu e l'insieme D dei gettoni blu di forma quadrata. Questi insiemi sono individuati da etichette diverse, ma contengono gli stessi elementi.

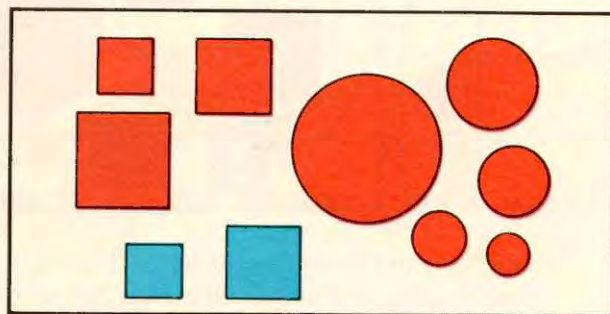


In questo caso si dice che i **due insiemi sono uguali** e si scriverà

$$C = D$$

C e D sono due nomi diversi dati allo stesso insieme.

Osserviamo ancora una volta con attenzione i gettoni della scatola.



$\emptyset$

Insieme vuoto

La scatola non contiene dischi blu, perciò se dico «essere blu e avere forma circolare» definisco un insieme che non contiene elementi. Esso si chiama **Insieme vuoto** e lo indico con il simbolo $\emptyset$.

L'insieme vuoto $\emptyset$ è **sottoinsieme di qualunque insieme A** : agli elementi di $\emptyset$ si chiede di appartenere anche ad A .

Dunque possiamo ritenere che:

$$\emptyset \subset A \quad \text{qualunque sia l'insieme } A.$$

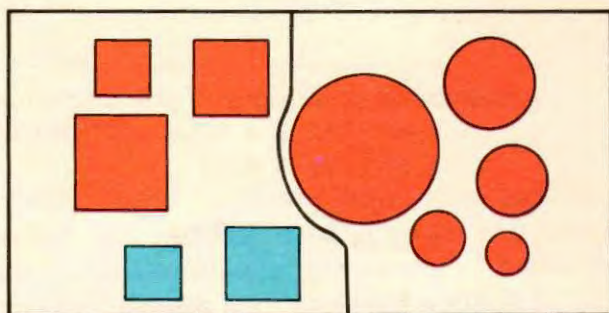
Un altro caso di sottoinsieme particolare di un qualunque insieme A è lo stesso insieme A . Se scriviamo

$$A \subset A$$

intendiamo dire che qualunque elemento di A appartiene anche ad A : questa affermazione è senz'altro vera per ogni insieme A .

Abbiamo dunque visto che qualunque insieme ha come sottoinsiemi l'insieme $\emptyset$ e l'insieme stesso. Poiché però sono due sottoinsiemi un po' particolari si dice che questi due sottoinsiemi sono **impropri**.

Osserviamo ancora l'insieme I di tutti i gettoni della scatola e prendiamo in considerazione l'insieme A di tutti i gettoni quadrati:



C
Insieme
complementare

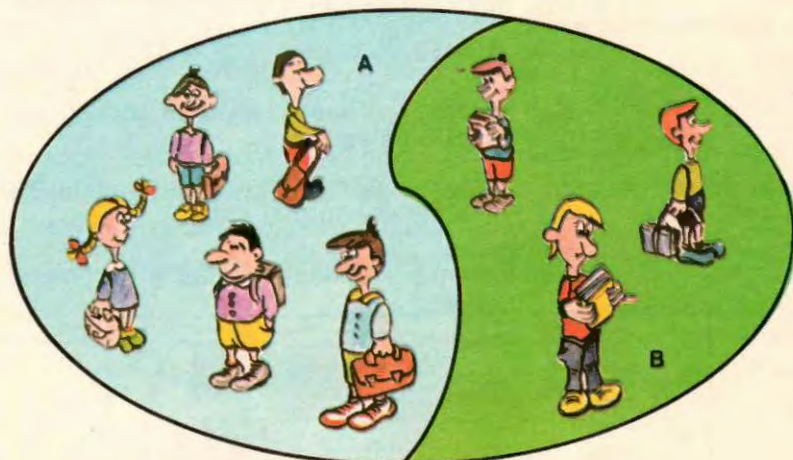
Partendo da questo insieme possiamo ottenerne un altro se consideriamo tutti gli elementi di I che non appartengono ad A . Nel nostro caso avremo l'insieme dei gettoni che *non* sono quadrati.

Si dice che quest'ultimo insieme è il **complementare di A** rispetto all'insieme I . Indicando con B l'insieme degli oggetti non quadrati scriveremo:

$$B = C_I A$$

e leggeremo « B è l'insieme complementare di A rispetto all'insieme I »
Osserviamo che gli elementi dell'insieme complementare sono caratterizzati dal non avere una certa proprietà.

Prendiamo ad esempio l'insieme I degli alunni della vostra classe e consideriamo l'insieme degli alunni che oggi hanno usato la cartella per portare i libri e indichiamolo con A .



Indichiamo con B l'insieme degli altri alunni della classe.
L'insieme B è il complementare di A rispetto all'insieme I .

$$B = C_I A$$

Per definire l'insieme B per comprensione diremo che B è l'insieme degli alunni della vostra classe che oggi *non* hanno usato la cartella per portare i libri.

Esercizi di verifica

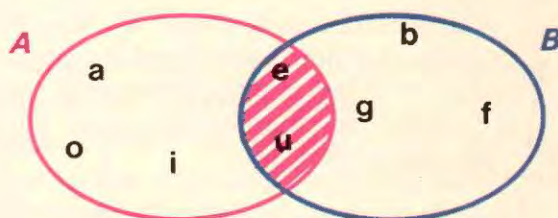
1. Stabilite se le seguenti affermazioni sono vere o false.
 $\{2, 4, 6\} \subset \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\{2, 4, 6\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$
 $\{7\} \subset \{0, 1, 2\}$
 $\{1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{N}$
2. Sia A l'insieme i cui elementi sono le lettere che formano la parola «Mario».
Scrivete il sottoinsieme delle vocali e quello delle consonanti di tale parola.
3. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ trovate il sottoinsieme i cui elementi sono numeri pari e quello i cui elementi sono numeri dispari.
4. Dite se l'insieme {stalla, nido, tana, ovile} è uguale all'insieme {ovile, tana, nido, stalla}.
5. Rappresentate con diagrammi di Eulero-Venn i seguenti insiemi:
 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ $B = \{e, f, h, i\}$
 $C = \{d, a, c, e, l, m\}$ $D = \{i, h, f, e\}$
e rispondete alle seguenti domande
l'insieme B è sottoinsieme di A ?
l'insieme C è sottoinsieme di A ?
l'insieme B è uguale all'insieme D ?
6. Dite quali dei seguenti insiemi sono diversi
 $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{c, a, d, b\}$ $C = \{a, b, e, f\}$
7. Nell'insieme dei numeri naturali, individuate i complementari dei seguenti sottoinsiemi:
 A è l'insieme dei numeri naturali maggiore di 14
 B è l'insieme dei numeri pari.
8. Nell'insieme dei triangoli qual è il complementare dell'insieme dei triangoli scaleni?

5 Le operazioni tra insiemi

1/L'INTERSEZIONE

Gli insiemi possono essere combinati fra di loro, mediante certe operazioni, per formare altri insiemi, esattamente come i numeri possono essere combinati fra loro mediante operazioni, come ad esempio l'addizione e la moltiplicazione, per formare altri numeri.

Consideriamo gli insiemi $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{e, u, b, g, f\}$. Rappresentiamo gli insiemi mediante un diagramma di Venn.



Osservate che gli elementi e, u appartengono sia ad A che a B : i due insiemi hanno una parte comune.

L'insieme $\{e, u\}$ rappresentato dalla parte comune (tratteggiata nella figura) costituisce un nuovo insieme che si chiama intersezione di A e B . Esso è sottoinsieme sia di A che di B .

$\cap$
intersezione

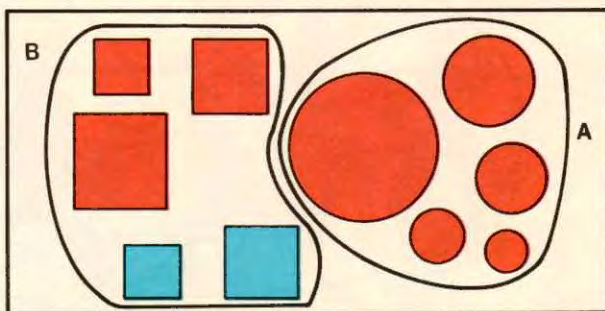
L'operazione di intersezione si indica con il segno $\cap$.

Scriveremo dunque $A \cap B$ e leggeremo « A intersezione B ».

Nell'esempio visto avremo

$$A \cap B = \{e, u\}$$

Può accadere che gli insiemi A e B non abbiano elementi comuni. Se per esempio ritorniamo alla nostra scatola di gettoni colorati e consideriamo l'insieme A degli oggetti circolari e l'insieme B dei quadrati, vediamo che gli insiemi A e B non hanno elementi comuni.



In questo caso diciamo che « A intersezione B » è l'insieme vuoto e scriveremo:

$$A \cap B = \emptyset$$

Quando gli insiemi A e B non hanno elementi comuni, cioè sono tali che la loro intersezione è un insieme vuoto, vengono detti insiemi disgiunti.

Diamo allora la seguente definizione:

■ L'intersezione di due insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B .

Nell'ultimo esempio gli insiemi A e B sono stati definiti per comprensione, A e B sono stati cioè individuati mediante delle caratteristiche (avere forma circolare e avere forma quadrata).

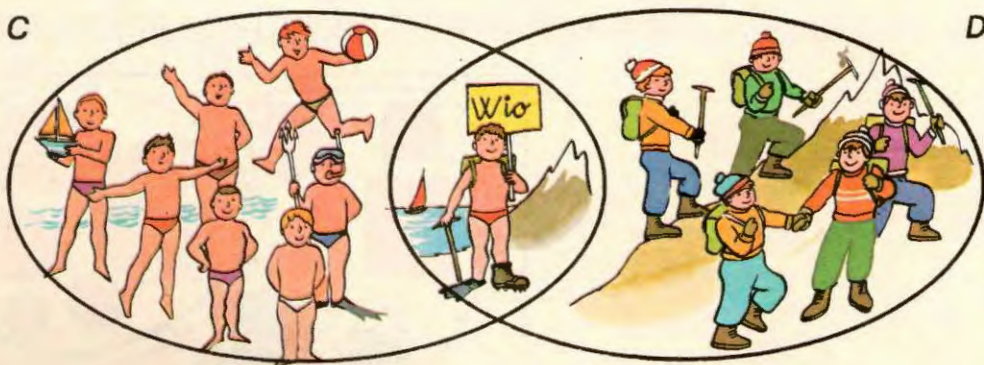
Facciamo un altro esempio: se A è l'insieme di tutti i bambini maschi presenti nella classe I^a A e B l'insieme di tutti i ragazzi della scuola che indossano qualche cosa di blu, l'insieme $A \cap B$ formato dagli elementi che appartengono sia ad A che a B , si definisce così: l'insieme dei maschi che sono presenti in I^a A «e» che portano qualche cosa di blu.

La congiunzione «e» che connette due proprietà, quella di essere maschio presente in classe e quella di possedere un indumento blu, è associata all'intersezione.

Facciamo qualche altro esempio.

Chiamiamo A l'insieme delle persone residenti a Milano e B l'insieme delle persone che hanno sede di lavoro a Milano. L'insieme $A \cap B$ sarà formato da tutte quelle persone che risiedono a Milano e che hanno a Milano la sede di lavoro.

Se durante l'estate vado al mare e in montagna, allora io appartengo all'insieme intersezione tra C e D ; dove C è l'insieme delle persone che d'estate vanno al mare e D è l'insieme delle persone che d'estate vanno in montagna.



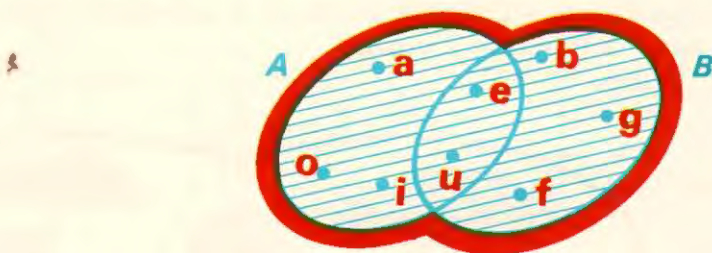
2/L'UNIONE

$\cup$
unione

Consideriamo ancora gli insiemi $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{e, u, b, g, f\}$. L'insieme i cui elementi appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B si chiama **unione** fra i due insiemi e in simboli si scrive

$$A \cup B.$$

e si legge « A unione B ».



Nella figura si vedono i diagrammi dei due insiemi A e B ; la zona che rappresenta l'insieme $A \cup B$ è tratteggiata.

Nel nostro esempio $A \cup B$ è l'insieme $\{a, e, i, o, u, b, g, f\}$.

Notiamo che in $A \cup B$ si dovranno inserire una sola volta gli elementi che appartengono sia ad A che a B .

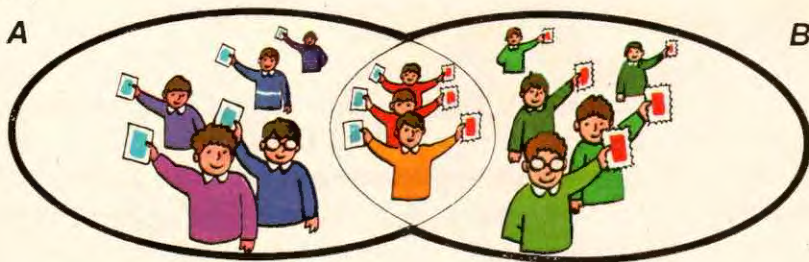
Diamo la seguente definizione:

■ **l'unione di due insiemi A e B è l'insieme i cui elementi appartengono ad A o a B o a entrambi.**

Nell'esempio considerato gli insiemi A e B sono definiti per *estensione*. La loro unione è l'insieme degli elementi che compaiono almeno in una delle due elencazioni. Se gli insiemi sono definiti per *comprensione*, allora A è l'insieme degli elementi che godono di una certa proprietà e B è l'insieme degli elementi che godono di un'altra proprietà. L'insieme unione $A \cup B$ è quello formato dagli elementi che possiedono *almeno una* delle due proprietà.

Consideriamo ad esempio l'insieme A degli alunni della tua classe che fanno collezione di figurine e l'insieme B degli alunni che fanno collezione di francobolli.

L'insieme $A \cup B$ sarà formato da tutti quegli alunni che fanno collezione, indifferentemente, di figurine oppure di francobolli e naturalmente anche dagli alunni che fanno collezione sia di figurine che di francobolli.



Volendo definire per comprensione l'insieme $A \cup B$ diremo dunque «l'insieme degli alunni della tua classe che fanno collezione di figurine o che fanno collezione di francobolli».

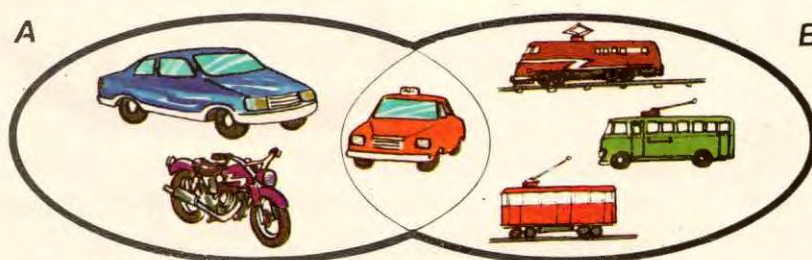
Per dare la proprietà caratteristica degli elementi dell'unione $A \cup B$, abbiamo unito con la congiunzione **o** le proprietà dei singoli insiemi A e B .

La congiunzione o è dunque associata all'unione.

Facciamo un altro esempio.

Chiamiamo A l'insieme dei mezzi di trasporto pubblici e B l'insieme dei mezzi di trasporto a benzina.

L'insieme $A \cup B$



sarà «l'insieme dei mezzi di trasporto pubblici o a benzina».

3/IL PRODOTTO CARTESIANO

Vogliamo ora parlare di una nuova operazione: il prodotto cartesiano fra due insiemi.

Consideriamo un semplice esempio: a una festa partecipano tre ragazzi: Mario, Giacomo, Piero. Essi formano l'insieme $A = \{M, G, P\}$. Partecipano anche quattro ragazze: Rita, Bruna, Anna, Iolanda, che formano l'insieme $B = \{R, B, A, I\}$.

Essi decidono che ciascun ragazzo ballerà con tutte le ragazze. Proviamo a trovare tutte le coppie che si possono formare in modo che in esse il primo termine sia sempre un ragazzo e il secondo una ragazza.

(Mario, Rita)

(Mario, Bruna)

(Mario, Anna)

(Mario, Iolanda)

(Giacomo, Rita)

.....
.....

Scrivete al posto dei puntini, sul vostro quaderno, le coppie mancanti. Dovrete trovare in tutto 12 coppie.

Sono tutte coppie **ordinate**, nel senso che

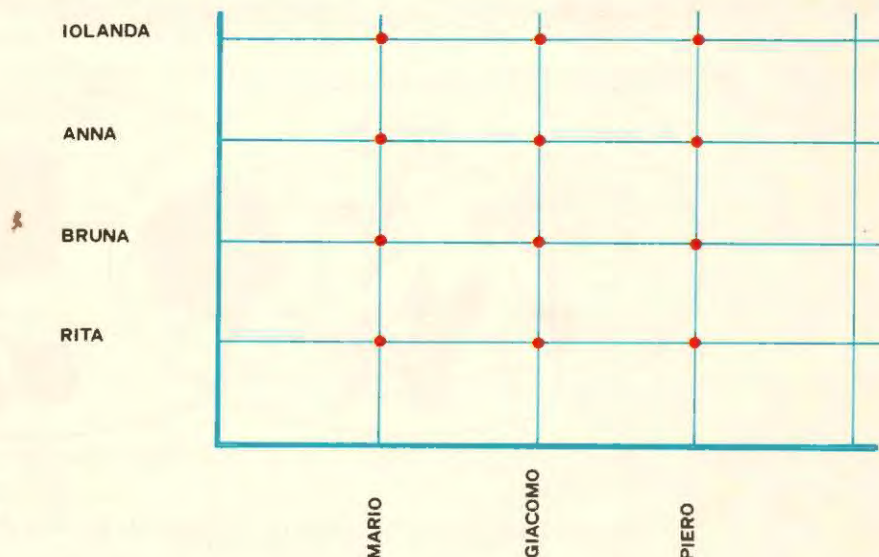
il primo elemento della coppia appartiene al primo insieme (A)

il secondo elemento della coppia appartiene al secondo insieme (B)



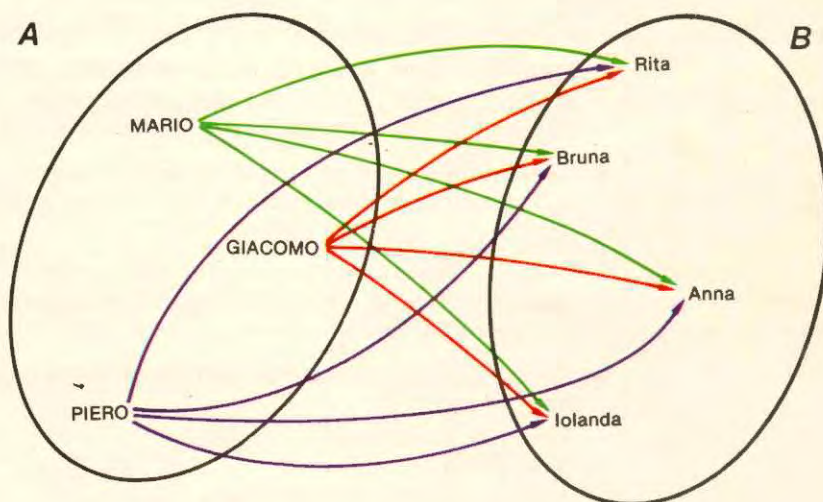
L'insieme di tutte queste coppie ordinate è chiamato **prodotto cartesiano** di A per B e si indica: $A \times B$.

Possiamo rappresentare questo insieme di coppie mediante il seguente grafico, che chiameremo *reticolo*:



In esso osservate che le coppie sono rappresentate da punti.

Possiamo rappresentare le coppie anche in un altro modo, utilizzando i diagrammi di Venn e delle frecce che vanno dal primo al secondo elemento della coppia (e quindi dal primo al secondo insieme).



In generale, se abbiamo due insiemi A e B , si chiama **prodotto cartesiano** di A per B e si indica $A \times B$, l'insieme delle coppie ordinate (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$.

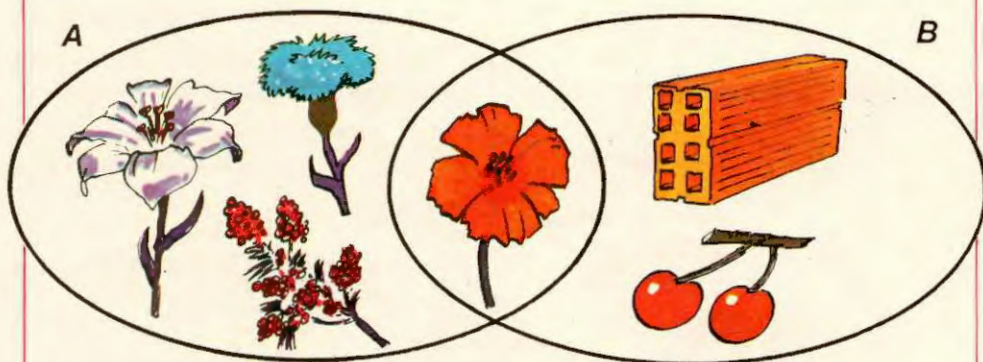
**Esercizi
di verifica**

1. Scrivi per estensione e rappresenta con diagrammi di Venn l'intersezione dei seguenti insiemi

$A = \{\text{legno, lima, pialla, tenaglia, chiodi, martello}\}$

$B = \{\text{quadro, chiodi, cornice, martello}\}$

2. Osserva la seguente rappresentazione:



e scrivi per comprensione gli insiemi A , B , $A \cap B$.

3. Considera i due insiemi

$A = \{0, 2, 4, 6\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Osserverai che $A \subset B$.

Scrivi per estensione $A \cap B$ e poi rappresentala con i diagrammi di Venn. Cosa osservi?

4. Scrivi per estensione e rappresenta con i diagrammi di Venn l'unione dei seguenti insiemi

$A = \{\text{penna, matita, quaderno, diario}\}$

$B = \{\text{romanzo, quaderno, enciclopedia, diario, foglio, giornale}\}$

5. Dato l'insieme A dei giorni di settembre in cui è piovuto e l'insieme B dei giorni di settembre con temperatura massima al di sotto dei 23° , scrivi per comprensione l'insieme $A \cup B$.

6. Considera ancora gli insiemi dell'esercizio 3. Scrivi per estensione e rappresenta graficamente $A \cup B$. Cosa osservi?

7. Siano dati i due insiemi $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Trovate tutti i termini del prodotto cartesiano $A \times B$ e poi quelli di $B \times A$; fate una **rappresentazione grafica** e dite che cosa potete osservare.

8. Costruisci e **rappresenta graficamente** il prodotto cartesiano $A \times B$ degli insiemi

$A = \{di, a, da\}$

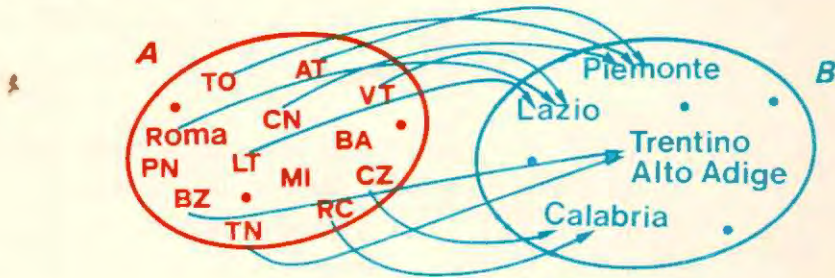
$B = \{il, la\}$

Ad ogni coppia cosa potresti associare?

4/RELAZIONI TRA GLI INSIEMI

Studiando geografia avete visto che ogni regione italiana è formata da un certo numero di province. Possiamo quindi stabilire che tra l'insieme A delle province italiane e l'insieme B delle regioni italiane esiste un legame o, come diremo meglio, una relazione.

Indicheremo, per essere brevi, ogni provincia con la sua sigla automobilistica.



Potremo esprimere la relazione tra l'insieme A e l'insieme B con la frase

«..... è provincia della regione»

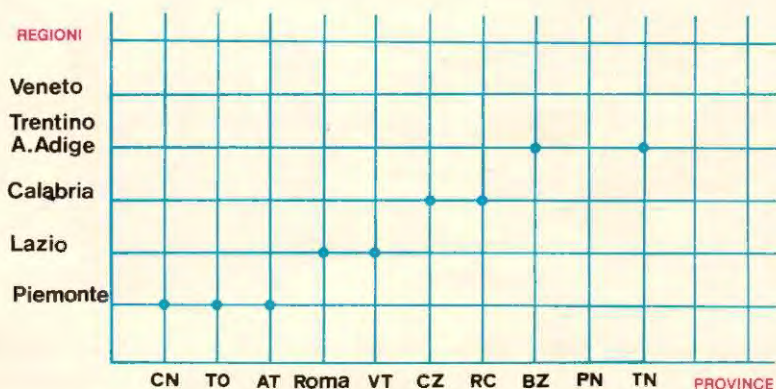
Al posto dei puntini rossi scriveremo un elemento dell'insieme A , cioè una provincia e al posto dei puntini blu un opportuno elemento dell'insieme B , cioè una regione.

Avremo così delle *coppie ordinate*, formate da un primo elemento appartenente ad A e da un secondo elemento appartenente a B .

(TO, Piemonte)	(VT, Lazio)	(.....,)
(CN, Piemonte)	(Roma, Lazio)	(.....,)

Questo insieme di coppie ordinate altro non è che un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

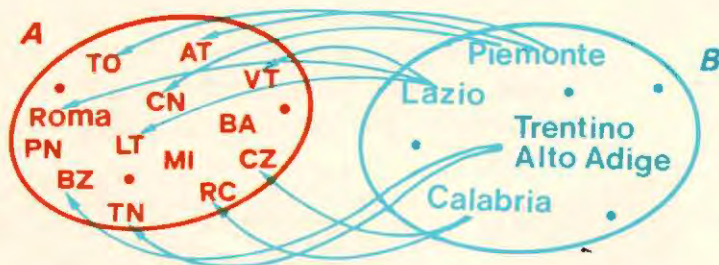
Rappresentiamo perciò la relazione utilizzando un grafico già usato per rappresentare il prodotto cartesiano: il reticolo.



In questo caso possiamo anche considerare la relazione inversa

«La regione contiene la provincia di»

Nella rappresentazione seguente osservate che le frecce vanno in senso inverso, cioè da B ad A .



Le coppie che soddisfano la relazione inversa sono formate dagli stessi elementi delle precedenti, ma in ordine inverso

(Piemonte, TO) (Lazio, Roma) (.....,)
 (Piemonte, CN) (Lazio, VT) (.....,)

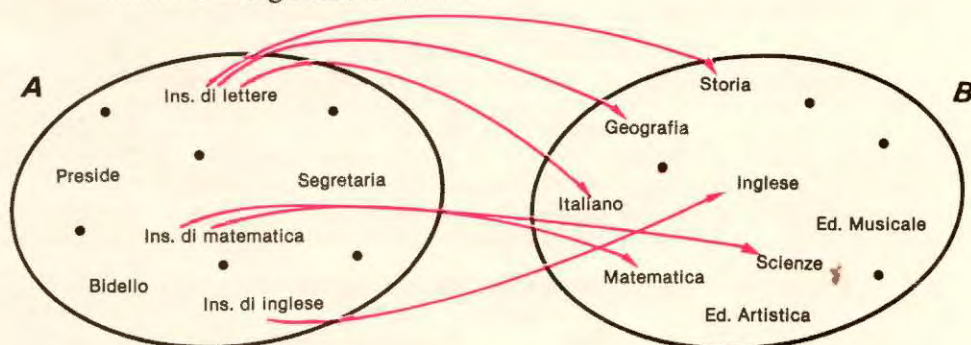
La relazione che abbiamo considerato fa corrispondere ad ogni elemento di A un solo elemento di B perché ogni provincia può appartenere ad una sola regione.

Si dice che questo tipo di relazione stabilisce tra gli elementi dei due insiemi A e B una **corrispondenza univoca**.

In generale diremo che tra gli elementi di due insiemi A e B vi è una corrispondenza univoca quando ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B .

Non tutte le relazioni permettono di stabilire corrispondenze univoche. Pensiamo ad esempio all'insieme A delle persone che lavorano nella vostra scuola e l'insieme B delle vostre materie di studio e consideriamo la relazione

«..... è insegnante di»

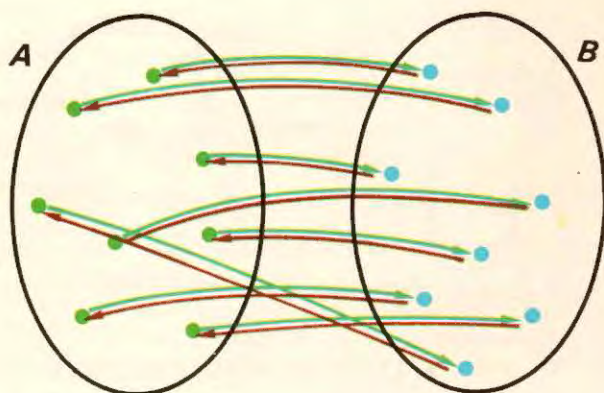


Non è vero che ad ogni elemento di A corrisponde un elemento di B perché né il Preside né il segretario vi insegnano alcuna materia; e non è nemmeno vero che ad ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B perché ad esempio l'insegnante di lettere vi insegna tre materie: Italiano, Storia e Geografia.

5/LA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

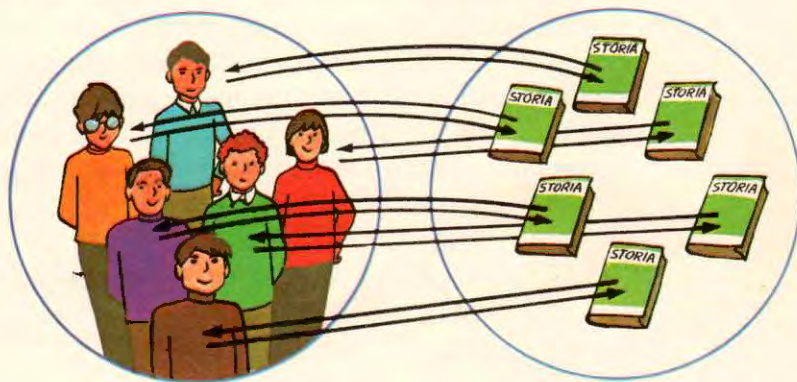
Tra i vari tipi di corrispondenze che potremmo considerare ve n'è una estremamente importante: la **corrispondenza biunivoca** alla quale abbiamo già brevemente accennato nel capitolo precedente.

Osservate la figura. In essa vedete che a **ogni elemento del primo insieme A corrisponde uno e un solo elemento nel secondo insieme B** e viceversa a **ogni elemento dell'insieme B corrisponde uno e un solo elemento dell'insieme A** .



Se per esempio consideriamo come insieme A quello degli alunni di una classe e come insieme B quello dei loro testi di storia possiamo dire che ogni alunno possiede *uno e un solo* testo di storia e viceversa ogni testo di storia è posseduto da *uno e un solo* allievo.

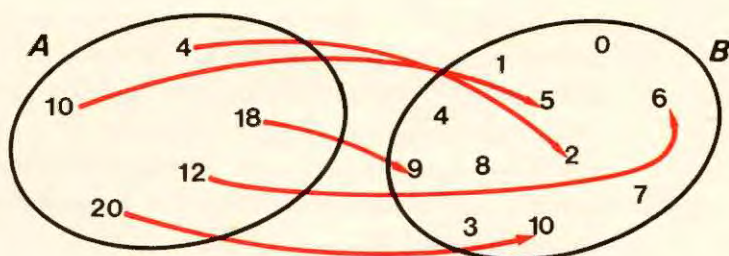
Come avrete capito anche dall'esempio, questo tipo di corrispondenza tra i due insiemi è una *corrispondenza univoca sia in un senso che nell'altro* ed è proprio per questo motivo che è detta **biunivoca**, cioè univoca due volte.



Esercizi di verifica

1. Costruisci una relazione tra i due insiemi:
 $A = \{\text{colazione, pranzo, merenda, cena}\}$
 $B = \{\text{latte, acqua, bistecca, marmellata, formaggio, insalata, pane, minestra}\}$
Rappresenta la relazione su un reticolo.

2. Individua la relazione tra i due insiemi **A** e **B** qui rappresentata.



La relazione stabilisce una corrispondenza univoca da **A** a **B**?

3. Scrivi per estensione l'insieme **A** dei tuoi libri di testo e l'insieme **B** delle materie di studio.

La relazione

«..... è un libro di»

stabilisce tra i due insiemi una corrispondenza biunivoca? Perché?

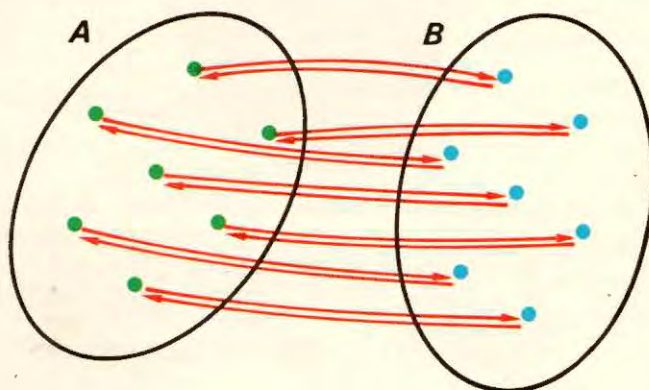
6/INSIEMI EQUIPOTENTI

Il concetto di corrispondenza biunivoca sta alla base dell'idea di numero.

■ Possiamo infatti osservare che se due insiemi sono egualmente numerosi (cioè sono formati dallo stesso numero di elementi), è possibile stabilire tra essi una corrispondenza biunivoca.

Supponiamo di avere due scatole, una che contiene palline verdi e una che contiene palline azzurre. Indichiamo con **A** l'insieme delle palline verdi e con **B** l'insieme delle palline azzurre. Togliamo ora una pallina verde dalla prima scatola e una pallina azzurra dalla seconda; un'altra pallina verde e di nuovo una pallina azzurra e così via.

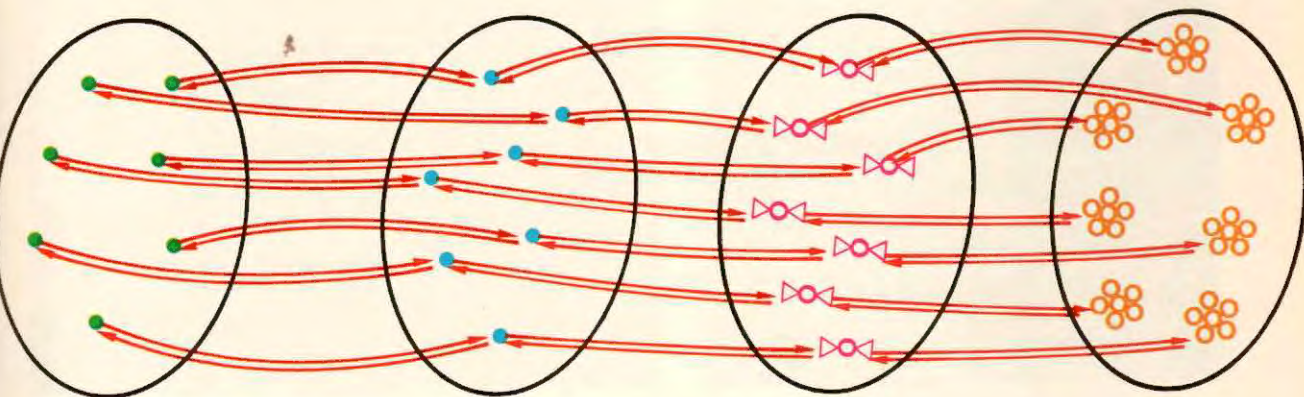
Se le due scatole restano vuote contemporaneamente, diciamo che le palline verdi sono tante quante le palline azzurre e che perciò a ogni pallina verde corrisponde una e una sola pallina azzurra e viceversa a ogni pallina azzurra corrisponde una e una sola pallina verde.



Tra gli insiemi A e B si è stabilita una corrispondenza biunivoca e si dice che gli insiemi sono **equipotenti**, cioè egualmente numerosi.

Supponiamo di avere una terza scatola contenente caramelle. Se procediamo come prima e troviamo che le caramelle sono tante quante le palline azzurre, possiamo dire subito che le caramelle sono tante quante le palline verdi.

Di insiemi egualmente numerosi ne possiamo trovare quanti ne vogliamo.



Sotto l'aspetto della «numerosità» tutti questi insiemi si equivalgono ed hanno come caratteristica comune quella di contenere **7** elementi. Siamo così tornati alla nozione di **numero cardinale** che avevamo cominciato a farvi scoprire già nelle prime pagine di questo capitolo.