Vettori e scalari

GRANDEZZE FISICHE

- **Scalari**: sono completamente definite quando se ne conosce la sola misura (es. tempo, massa, temperatura, volume…)
- **Vettoriali**: richiedono un maggior contenuto informativo (es. velocità, accelerazione, forza…)

*Domenica sono andato in bicicletta per **due ore**…*

L'informazione sul tempo è completa?

Il **tempo** è un esempio di quantità **scalare**: sono sufficienti un numero e la rispettiva unità di misura per caratterizzarlo completamente. Quindi informazione sul tempo è completa

Vettori e scalari

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta…*

L'informazione sullo spostamento è completa? No, ne conosco solo l'entità.

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la Val d'Adige…* $\Rightarrow$ **ho aggiunto informazione sulla mia direzione.**

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la Val d'Adige verso Trento* $\Rightarrow$ **questo dato completa l'informazione sul verso del mio spostamento.**

Una grandezza fisica è un vettore quando per definirla completamente è necessario fornire un modulo (= l'entità), una direzione e un verso.

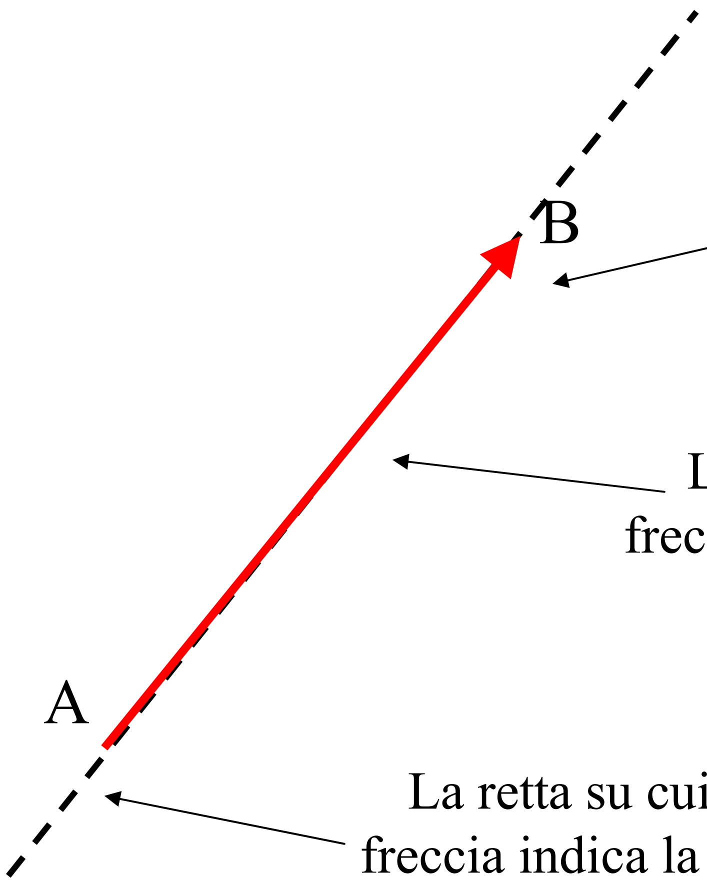
$$\textbf{VETTORE} \begin{cases} \text{modulo} \\ \text{direzione} \\ \text{verso} \end{cases}$$

Rappresentazione grafica

Un **vettore** può essere rappresentato graficamente da un **segmento orientato**.

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

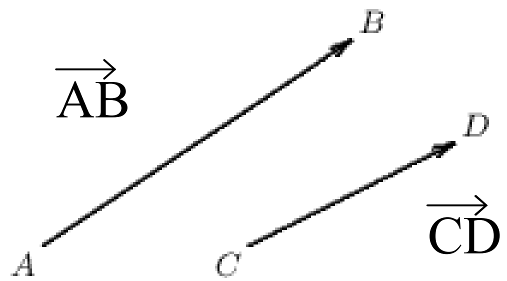
$|\,\mathbf{a}\,| = |\,\overrightarrow{AB}\,|$ si chiama modulo



La punta della freccia indica il **verso**.

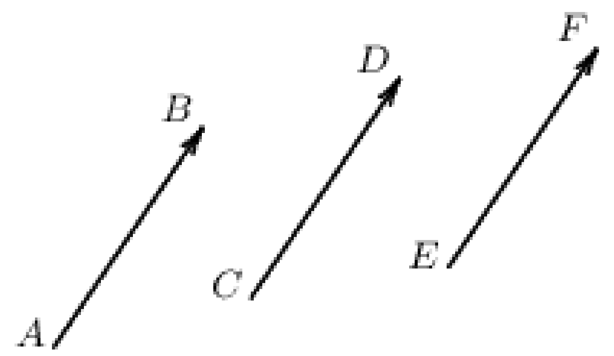
La lunghezza della freccia indica il **modulo**.

La retta su cui giace la freccia indica la **direzione**.

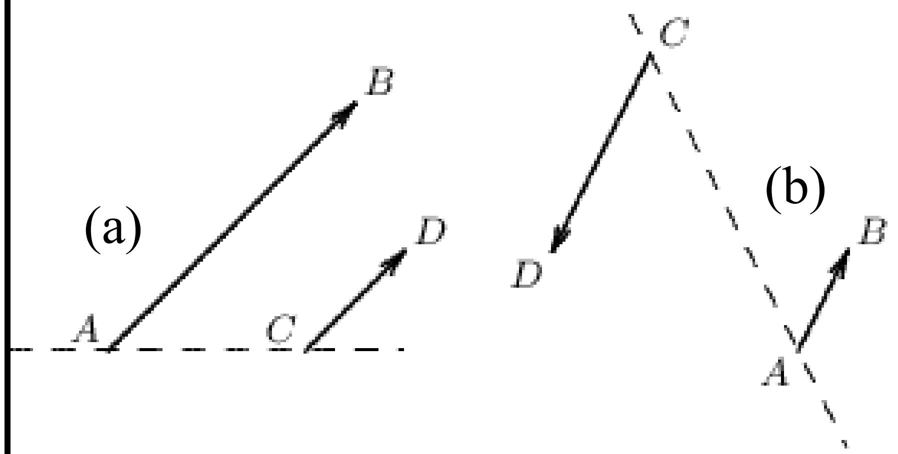


Rappresentazione grafica

Definizione: Un **vettore** nel piano o nello spazio è definito come **l'insieme di tutti i segmenti orientati aventi uguali direzione, verso e modulo**.

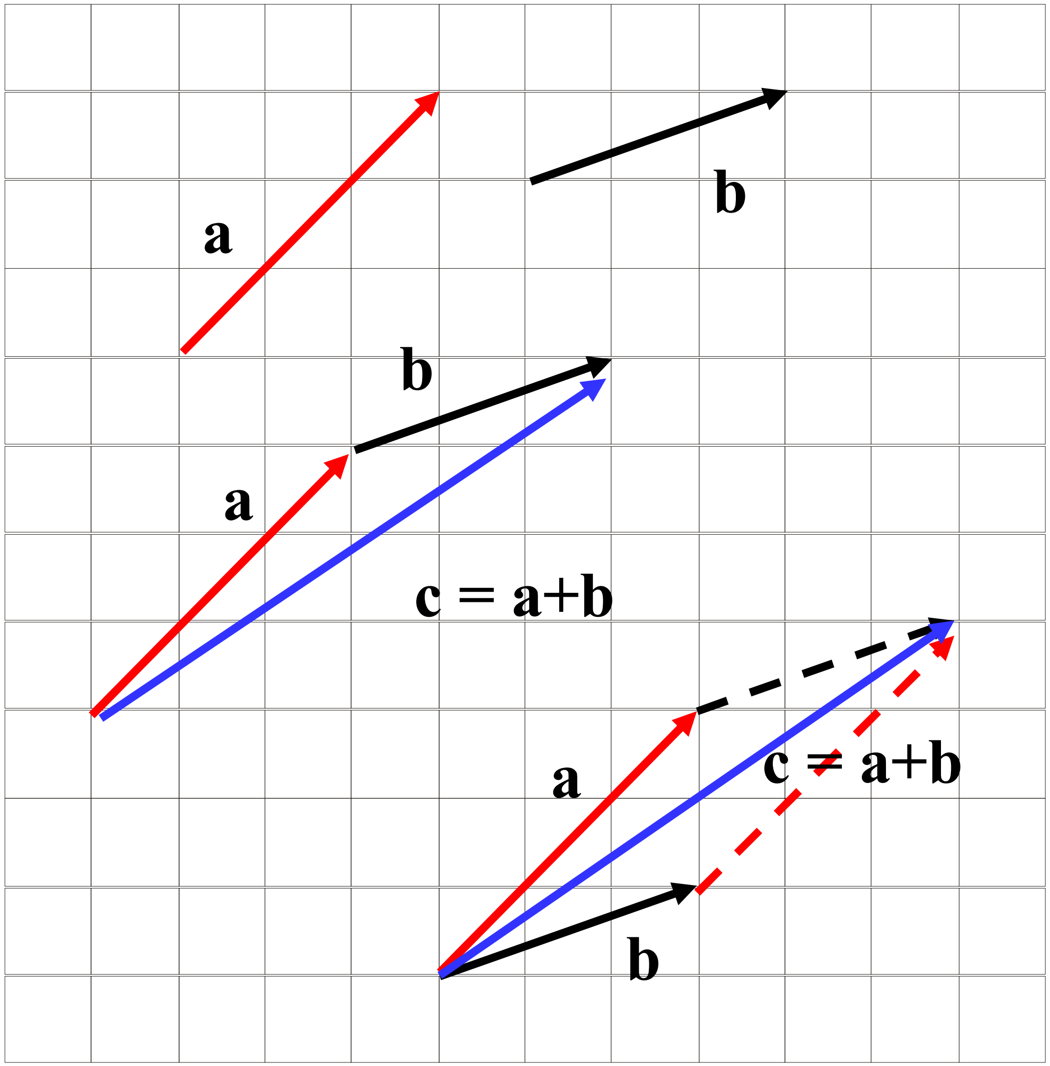


Segmenti orientati **rappresentativi di uno stesso vettore**.



Segmenti orientati paralleli concordi (a) ed opposti (b).

Somma di vettori



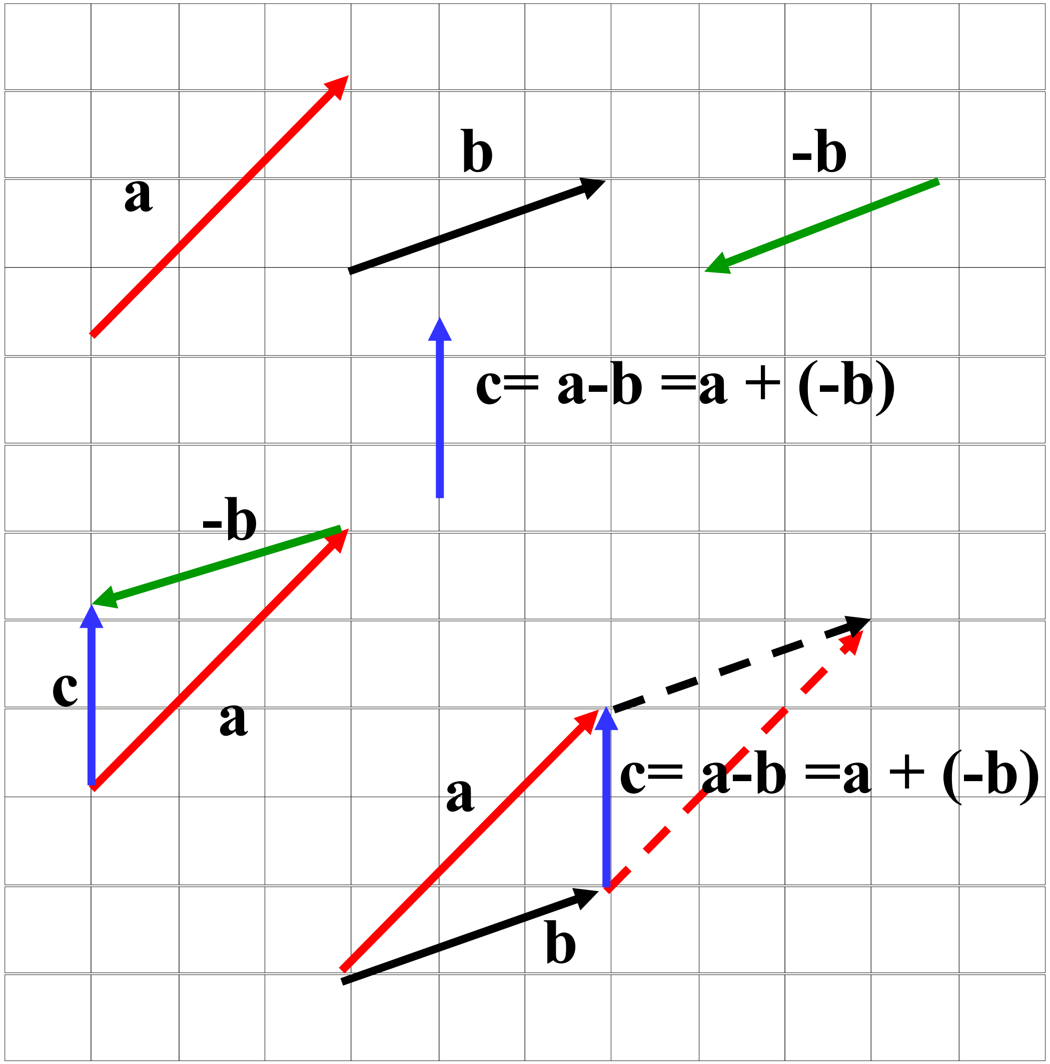
Somma di vettori

Definizione: La somma di due vettori **a** e **b** è un vettore **c** = **a** + **b** la cui direzione e verso si ottengono nel modo seguente:
si fissa il vettore **a** e, a partire dal suo punto estremo, si traccia il vettore **b**. Il vettore che unisce l'origine di **a** con l'estremo di **b** fornisce la somma **c** = **a** + **b**.

La somma di due vettori può essere calcolata anche utilizzando la **regola del parallelogramma**:
La somma di due vettori non collineari è data dal vettore rappresentato dalla diagonale del parallelogramma costruito per mezzo dei segmenti orientati rappresentativi dei due vettori e disposti in modo da avere l'origine in comune.

Proprietà commutativa:	**a** + **b** = **b** + **a**
Proprietà associativa:	(**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**)

Differenza di vettori

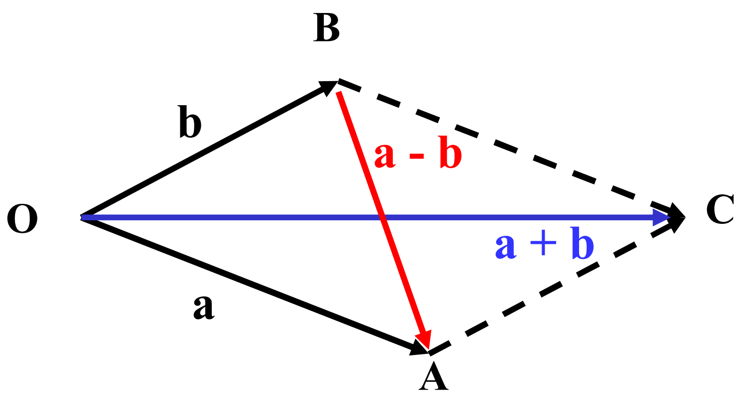


Differenza di vettori

Definizione: Il vettore opposto ad a = $\overrightarrow{AB}$ è – a = $\overrightarrow{BA}$.
I moduli di a e – a sono uguali, la direzione è la medesima e i versi sono opposti.

Definizione: La differenza a – b di due vettori è la somma del vettore a con l'opposto del vettore b, ossia:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$



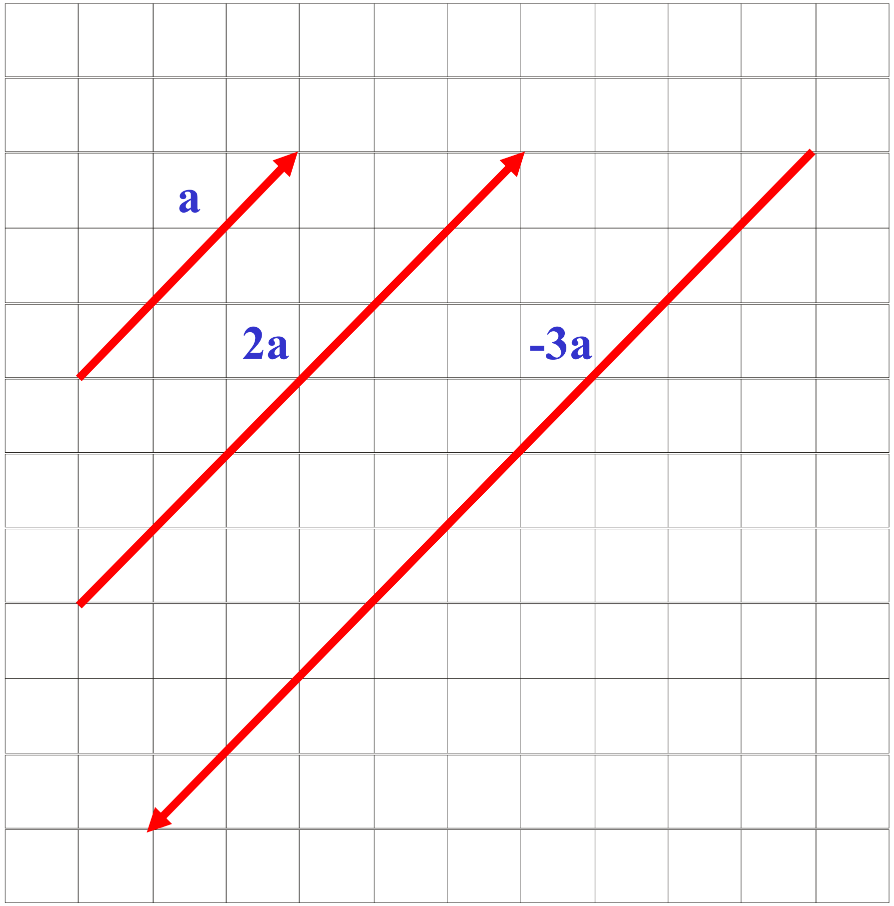
Notiamo che se, sulla base di a e di b disposti con la medesima origine O, si costruisce un parallelogramma, allora la lunghezza della diagonale uscente da O esprime la lunghezza di a + b mentre la lunghezza dell'altra diagonale è pari alla lunghezza del vettore a – b.

Moltiplicazione scalare-vettore

<u>Definizione</u>: La moltiplicazione αa (o aα) di un vettore a con il numero reale α è un vettore b = aα, collineare ad a, di modulo | α | · | a | e verso coincidente con quello di a se $\alpha > 0$, opposto a quello di a se $\alpha < 0$.
Nel caso che sia α = 0 o a = 0, il vettore b = 0.

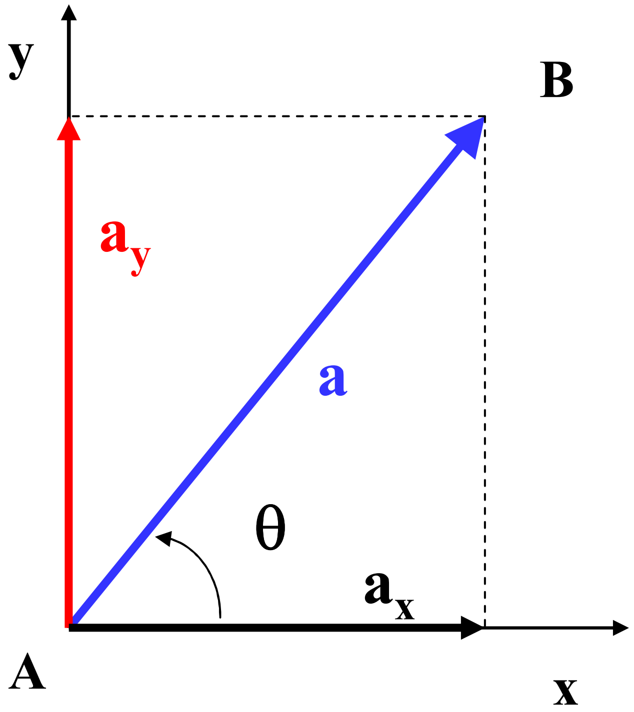
<u>Proprietà</u>:

1. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
2. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
3. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$



Componenti cartesiane

Il vettore può essere individuato anche tramite le sue componenti lungo un sistema di assi cartesiani.



Il modulo del vettore può essere espresso in funzione delle componenti (teorema di Pitagora):

$$\boxed{|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

Le componenti, a loro volta, sono legate al modulo dalle relazioni (trigonometria):

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= |\mathbf{a}| \cos\theta \\ a_y &= |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta \end{aligned}}$$

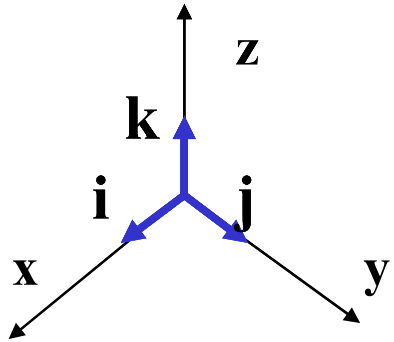
Anche l'angolo θ può essere espresso in funzione delle componenti:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}}$$

La somma dei vettori a_x e a_y dà il vettore a, di cui a_x e a_y sono i vettori componenti.

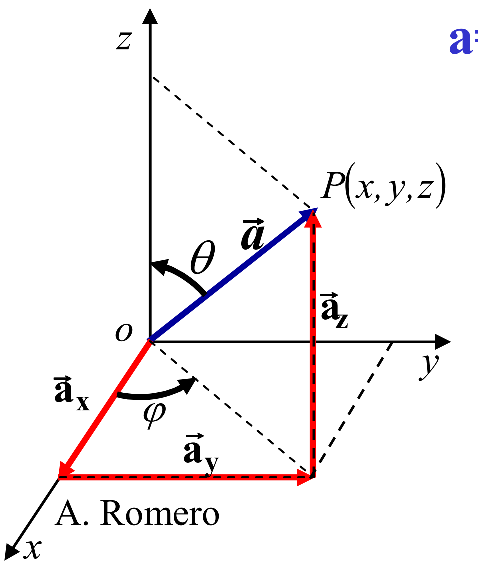
Versori e componenti cartesiane

Esistono dei vettori speciali, detti versori, che possono essere utilizzati per caratterizzare tutti gli altri vettori. I versori hanno queste caratteristiche:



- ✓ **hanno modulo 1;**
- ✓ **sono diretti lungo gli assi cartesiani;**
- ✓ **indicano il verso positivo degli assi cartesiani**

Un qualunque vettore a può essere espresso per mezzo delle sue componenti (che chiameremo a_x, a_y e a_z) e dei versori i, j e k (indicabili anche con la notazione $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

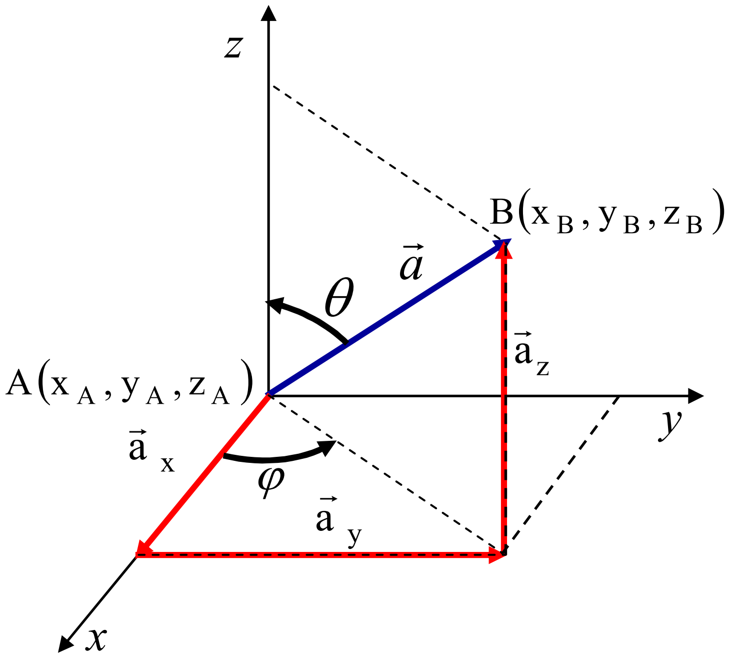


$$\mathbf{a}=a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k}= a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$$

con:

$$\begin{cases} a_x = a\sin\theta\cos\varphi \\ a_y = a\sin\theta\sin\varphi \\ a_z = a\cos\theta \end{cases}$$

Versori e componenti cartesiane



$$\bar{a} = \overline{AB} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Le componenti di un vettore qualsiasi $\overrightarrow{AB}$ si ottengono anche dalla differenza delle corrispondenti coordinate dell'estremo finale B con quelle del estremo iniziale A, ossia:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$

Il modulo espresso tramite le sue componenti sarà dunque dato da:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

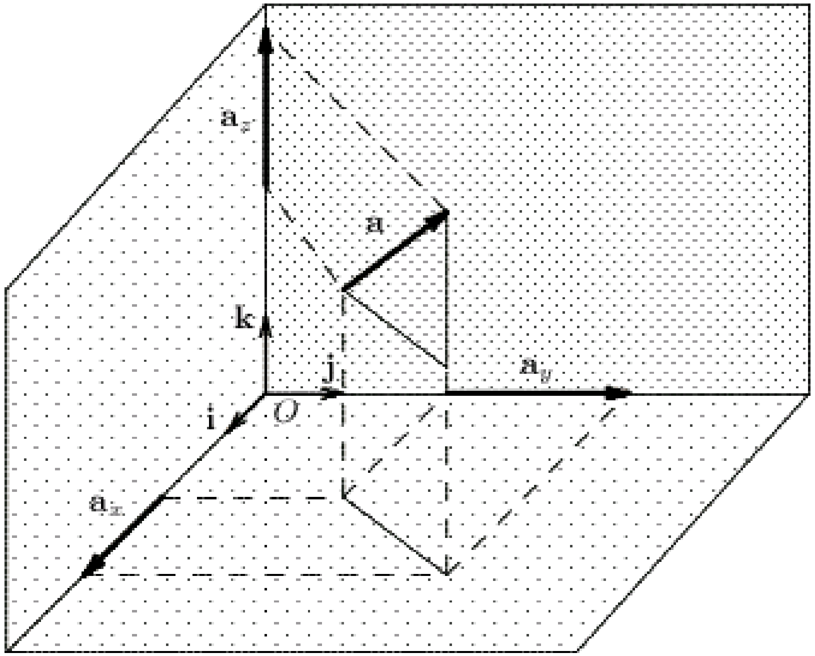
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Componenti cartesiane

In tre dimensioni:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}_x + \bar{\mathbf{b}}_y + \bar{\mathbf{b}}_z = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$



Le operazioni finora introdotte possono essere scritte in una nuova forma:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}}$$

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k}}$$

$$\boxed{\alpha\vec{a} = \alpha a_x\hat{i} + \alpha a_y\hat{j} + \alpha a_z\hat{k}}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Esempio

Quanto valgono la somma e la differenza di due vettori di componenti a_x = -2, a_y = 1 e b_x = 5, b_y = 2 ? Calcolare il modulo dei vettori somma e differenza.

$$\vec{a} = -2\hat{i} + \hat{j}$$

$$\vec{b} = 5\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (-2+5)\hat{i} + (1+2)\hat{j} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 4.24$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2-5)\hat{i} + (1-2)\hat{j} = -7\hat{i} - \hat{j}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 7.07$$

Esercizio

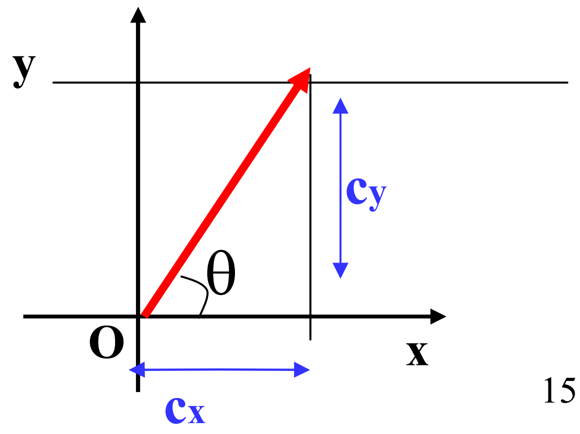
Dati i vettori **a**= 5 **i** +3**j** e **b**= -3 **i** + 2**j** , determinare il modulo, la direzione ed il verso di **c**=**a**+**b**

Sol.: **c** = **a** + **b**= (5-3) **i** +(3+2)**j** = 2 **i** + 5**j**

Modulo: $$|\mathbf{c}| = \sqrt{|\mathbf{c}_x|^2 + |\mathbf{c}_y|^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} = 5{,}4$$

La ***direzione*** è individuata dall'angolo θ che il vettore **c** forma con l'asse x

$$\tan\theta = \frac{c_y}{c_x} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan 2{,}5 = 68{,}2°$$

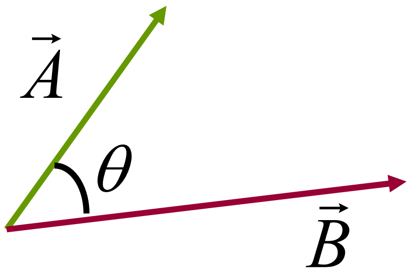


Prodotto scalare

Si tratta di un'operazione che associa ad una coppia di vettori uno scalare.

***Definizione*: Si dice prodotto scalare di due vettori A e B il numero reale dato da:**

A • B = | A | · | B | cos θ **dove θ è l'angolo compreso tra A e B.**



Proprietà

1. **Vale la proprietà commutativa** $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2. **α(A • B) = (α A) • B = A • (α B)**

3. **Il prodotto scalare di un vettore per se stesso è pari al quadrato del suo modulo**

4. **Il prodotto scalare di due vettore perpendicolari è nullo**

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A \cdot A \cdot cos\,0 = A^2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| \cdot |B| \cdot \cos 90 = 0$$

Se il prodotto scalare di due vettori è nullo, allora o uno dei due vettori coincide con il vettore nullo oppure i due vettori sono perpendicolari.

Prodotto scalare in componenti

Il prodotto scalare può anche essere espresso come *la somma dei prodotti delle componenti omonime* (cioè relative agli stessi assi); in simboli:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Dimostrazione:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right)\cdot\left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i} + \cancel{A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j}} + \cancel{A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k}}$$

$$\cancel{A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i}} + A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j} + \cancel{A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k}}$$

$$\cancel{A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{i}} + \cancel{A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{j}} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}$$

Si annullano i termini in cui compare il prodotto scalare di versori perpendicolari, e si ottiene

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Il prodotto scalare di un vettore per se stesso in componenti:

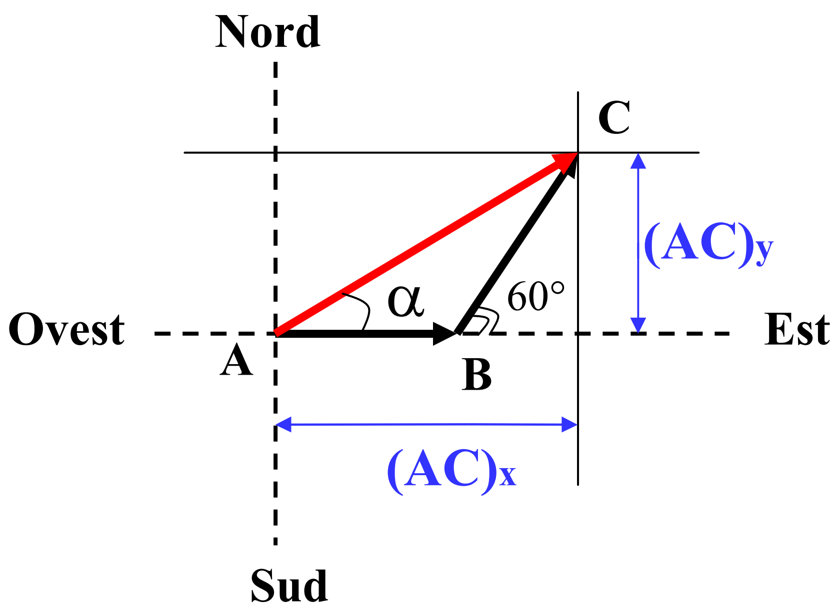
$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = a_xa_x + a_ya_y + a_za_z = \mathbf{a}^2$$

Esercizi

1. Un uomo percorre 3 km verso Est e poi 4 km a 60° a Nord rispetto a Est. Qual è lo spostamento risultante?
2. Si trovino modulo e direzione orientata dei vettori che hanno le seguenti componenti: (a) $A_x = 5$ m, $A_y = 3$ m; (b) $B_x = 10$ m/s, $B_y = -7$ m/s; (c) $C_x = -2$ m, $C_y = -3$ m.
3. Quanto valgono la somma e la differenza di due vettori di componenti $a_x = -2$, $a_y = 1$, $a_z = 3$ e $b_x = 5$, $b_y = 2$, $b_z = 0$? Calcolare il modulo dei vettori somma e differenza.
4. Dati i vettori **a**= 2 **i** +3**j** e **b**= 3/4 **i** + 1/2**j** , calcolare il prodotto scalare.
5. Rappresentare sul piano cartesiano i vettori A e B di componenti: $A_x = -2$ m $A_y = 2$ m e $B_x = 2$ m, $B_y = 2$ m. Calcolare il modulo e la direzione orientata dei vettori **A, B e C** essendo C la somma di **A e B**

Esercizio

Un uomo percorre 3 km verso Est e poi 4 km a 60° a Nord rispetto a Est. Qual è lo spostamento risultante?



$$\vec{AB} = (AB)_x \hat{i} + (AB)_y \hat{j}$$

$$\vec{BC} = (BC)_x \hat{i} + (BC)_y \hat{j}$$

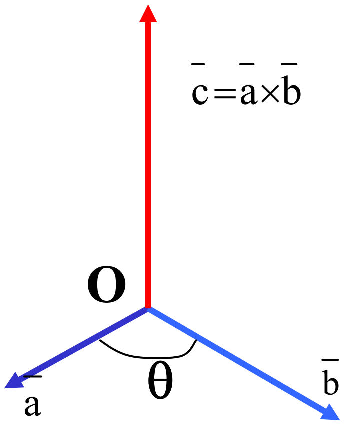
$$\vec{AC} = (AC)_x \hat{i} + (AC)_y \hat{j}$$

$$(AC)_x = (AB)_x + (BC)_x =$$
$$= (3 + 4\cos 60°)\,\text{km} = (3+2)\,\text{km} = 5\,\text{km}$$

$$(AC)_y = (AB)_y + (BC)_y =$$
$$= (0 + 4\sin 60°)\,\text{km} = 3.46\,\text{km}$$

$$|AC| = \sqrt{(AC)_x^2 + (AC)_y^2} = \sqrt{5^2 + (3.46)^2} = \sqrt{37} = 6.1\,\text{km}$$

$$\tan\alpha = \frac{(AC)_y}{(AC)_x} = \frac{3.46}{5} = 0.692 \rightarrow \alpha \cong 35°$$



Il prodotto vettoriale

Definizione

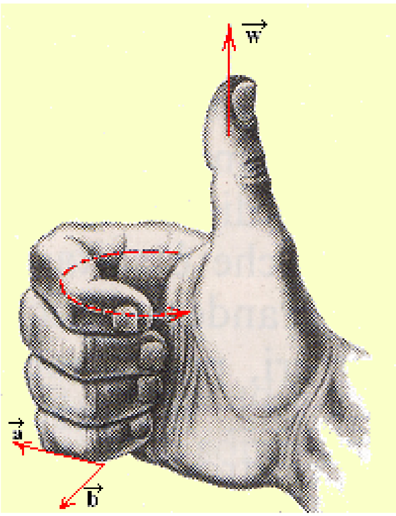
Si considerino due vettori $\bar{a}$ **e** $\bar{b}$

Si definisce prodotto vettoriale $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ **il vettore avente le seguenti proprietà:**

- ***direzione*: perpendicolare al piano individuato dai primi due;**
- ***modulo*: prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per il seno dell'angolo convesso θ da questi formato**

$$|c|=|a|\cdot|b|\text{sen}\theta$$

- ***verso*: quello secondo il quale si deve disporre un osservatore con i piedi nel punto O d'applicazione dei due vettori affinché possa veder ruotare il vettore** a **in senso antiorario perché si sovrapponga al vettore** b



Regola pratica per il verso:

"Regola della mano destra": si dispone la mano destra in linea col vettore **a** (primo vettore del prodotto cartesiano) e si fa ruotare la mano come per portare **a** sopra **b** (secondo vettore del prodotto cartesiano , il pollice teso punta nel verso di **c .**

Esercizio: prodotto scalare e vettoriale

Dati i due vettori **a** e **b** di componenti

$a_x = 2$; $b_x, = 2\sqrt{3}$

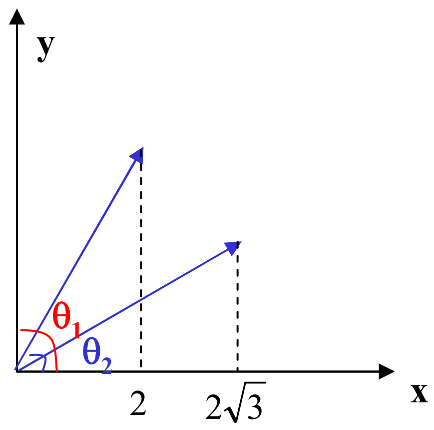
$a_y = 2\sqrt{3}$; $b_y, = 2$,

$a_z = 0$; $b_z = 0$

calcolare: **a)** il prodotto scalare

a1) Prodotto scalare utilizzano le componenti:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 2 + 0 = 8\sqrt{3}$$



a2) Prodotto scalare utilizzando la formula: |a| · |b| cos α

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 \qquad |b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

Individuare l'angolo compreso $\alpha = \theta_2 - \theta_1$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{a_x}{|a|} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5 \Rightarrow \theta_1 = 60° \\[2ex] \cos\theta_2 = \dfrac{b_x}{|b|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_2 = 30° \end{array}\right\} \alpha = 30°$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |a| \cdot |b| \cos 30° = 8\sqrt{3}$$

Esercizio: prodotto scalare e vettoriale

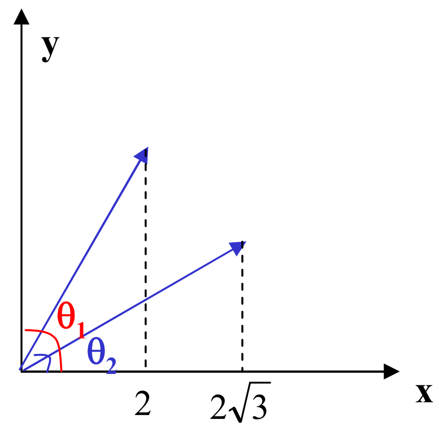
Dati i due vettori **a** e **b** di componenti

$a_x = 2;$ $b_{x'} = 2\sqrt{3}$

$a_y = 2\sqrt{3};$ $b_{y'} = 2$,

$a_z = 0;$ $b_z = 0$

calcolare: **a)** il prodotto scalare



b) Prodotto vettoriale $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$

Modulo $|c| = |a| \cdot |b| \operatorname{sen}\theta = 4 \cdot 4 \cdot \operatorname{sen} 30° = 16 \cdot 0{,}5 = 8$

Direzione: quella dell'asse z, ovvero perpendicolare al piano x-y dove giacciono i due vettori

Verso: applicando la regola della mano destra, risulta entrante nel piano della pagina

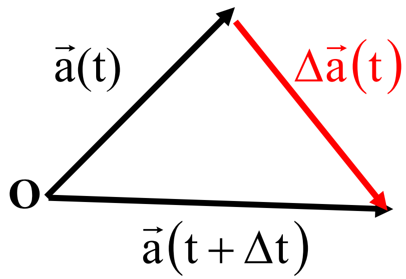
Derivata di un vettore

Sia dato un vettore dipendente dal tempo: $\vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k}$$

e si supponga che in un intervallo di tempo Δt il vettore subisca un incremento $\Delta\vec{a}$

$$\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t) = \Delta\vec{a}(t) \qquad \text{con} \qquad \Delta\vec{a}(t) = \Delta a_x(t)\hat{i} + \Delta a_y(t)\hat{j} + \Delta a_z(t)\hat{k}$$



Se si vuole ricavare la velocità della variazione di $\vec{a}(t)$, si può costruire il rapporto:

$$\frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta a_x(t)}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta a_y(t)}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta a_z(t)}{\Delta t}\hat{k}$$

Derivata di un vettore

Si definisce derivata di un vettore $\vec{a}$ rispetto alla variabile t, la quantità:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}$$

NOTA: **la derivata di un vettore è ancora un vettore**

in quanto l'operazione di derivazione equivale al prodotto di un vettore $\vec{da}$ per uno scalare 1/dt

In componenti:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_x(t)}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_y(t)}{\Delta t}\hat{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_z(t)}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\Downarrow$$

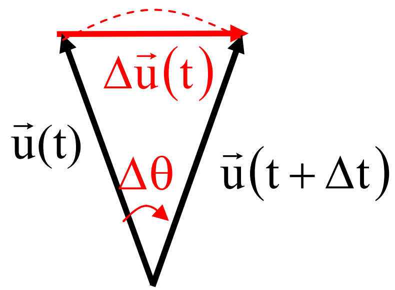
$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\hat{k}$$

Derivata di un versore

Dal momento che un versore è per definizione un vettore di modulo unitario, ***ciò che può cambiare in funzione di t è solo la direzione***.

In un tempo Δt il versore può compiere solo una rotazione di un certo angolo $\Delta\theta$.

$$\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)=\Delta\vec{u}(t)$$



Per $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec{u}$ tende ad infinitesimo $d\vec{u}$, perpendicolare ad $\vec{u}(t)$, il cui modulo si confonde con l'arco:

modulo: $du = Rd\theta = |u(t)|d\theta$ $\qquad R = |u(t)| = 1$

Vettore: $d\vec{u} = d\theta\vec{u}_N$ con $\vec{u}_N$: versore perpendicolare a u(t)

Si definisce derivata di un versore $\vec{u}(t)$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N$$