Cinematica del punto materiale

- E ` la parte piu` elementare della meccanica: studia il moto dei corpi senza riferimento alle sue cause
- Il moto e` determinato se e` nota la posizione del corpo in funzione del tempo
- Necessità di un sistema di riferimento per determinare la posizione
- Diversi tipi di sistemi di riferimento=diverse coordinate:
  - Cartesiano (2 e 3 dimensioni): x, y, z
  - Polare (2 dimensioni): ρ, ϕ

Cinematica

- il moto e la velocità

- l’accelerazione

- moto rettilineo uniforme

- moto rettilineo uniformemente accelerato

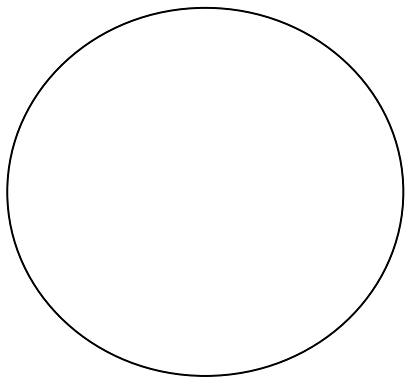
- moti periodici e composti

Il Moto

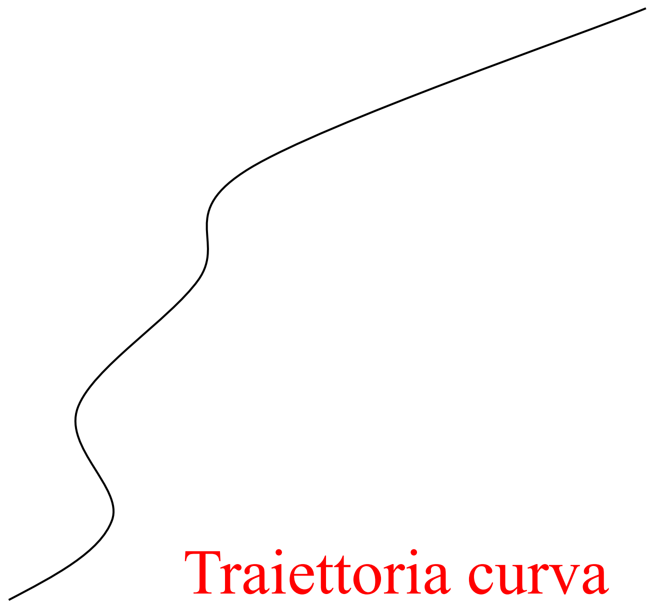
Un corpo è in moto quando la sua posizione rispetto ad un altro, assunto come riferimento, varia nel tempo. Solitamente si considera un riferimento solidale con la Terra

Traiettoria : linea costituita da tutte le **posizioni** occupate nel tempo dal **punto materiale**

Traiettoria rettilinea



Traiettoria circolare

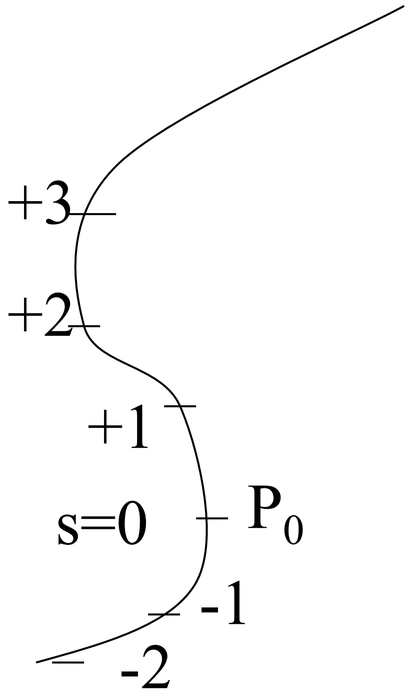


Traiettoria curva

Cinematica

- Le grandezze fisiche necessarie per lo studio della cinematica sono
  - Spazio – *s, l, x, r*…
  - Tempo - *t*
  - Velocita` - *v*
  - Accelerazione - *a*

Nota la traiettoria, si può riferire il moto ad essa : fissato arbitrariamente un punto P_0 si può individuare un qualunque altro punto P tramite il numero **s** che esprime la distanza di P da P_0



Per descrivere il moto di un punto materiale che si muove lungo una traiettoria, è sufficiente associare ad ogni istante t il numero s che esprime la sua posizione sulla traiettoria in quell'istante

La legge che associa ad ogni istante t il corrispondente valore di s è detta **legge oraria**

La legge oraria può essere espressa tramite:

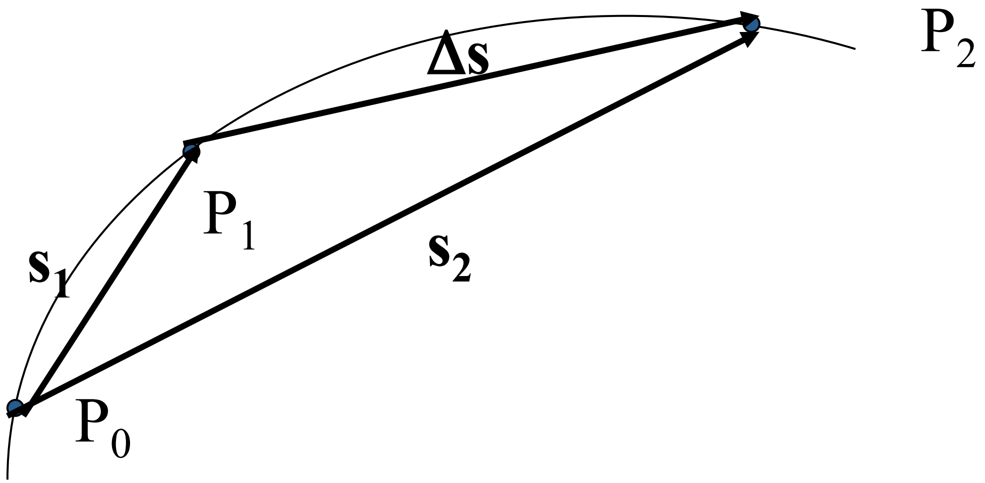
- una **tabella**
- un **grafico**
- una **formula matematica**

Velocità : grandezza vettoriale che esprime la rapidità con cui cambia nel tempo la posizione del punto materiale

Velocità media

rapporto tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo

$$\mathbf{v}_m = (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)/(t_2 - t_1) = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{s} / \Delta t$$

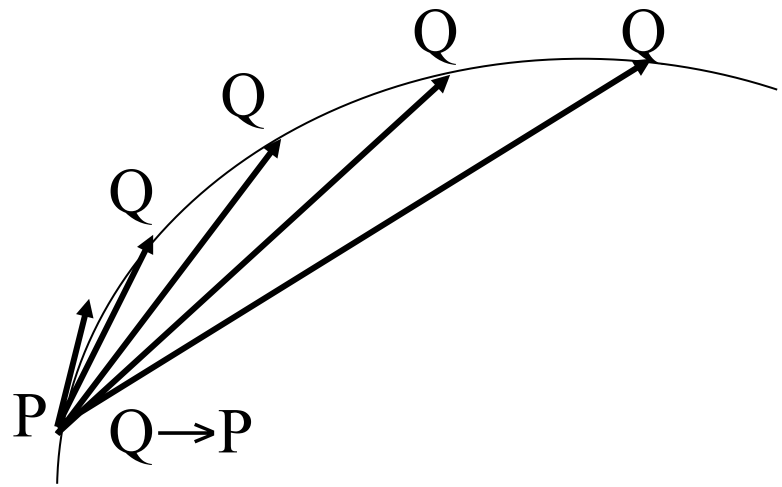


- La direzione coincide con quella della corda P_1P_2
- Il modulo è dato dal rapporto tra la misura di Δs e quella di Δt
- Il verso è quello di $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{s}$

Velocità istantanea

valore limite a cui tende la velocità media calcolandola su intervalli di tempo sempre più piccoli

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{\Delta s} / \Delta t$$



direzione

tangente alla traiettoria nel punto occupato nell’ istante considerato

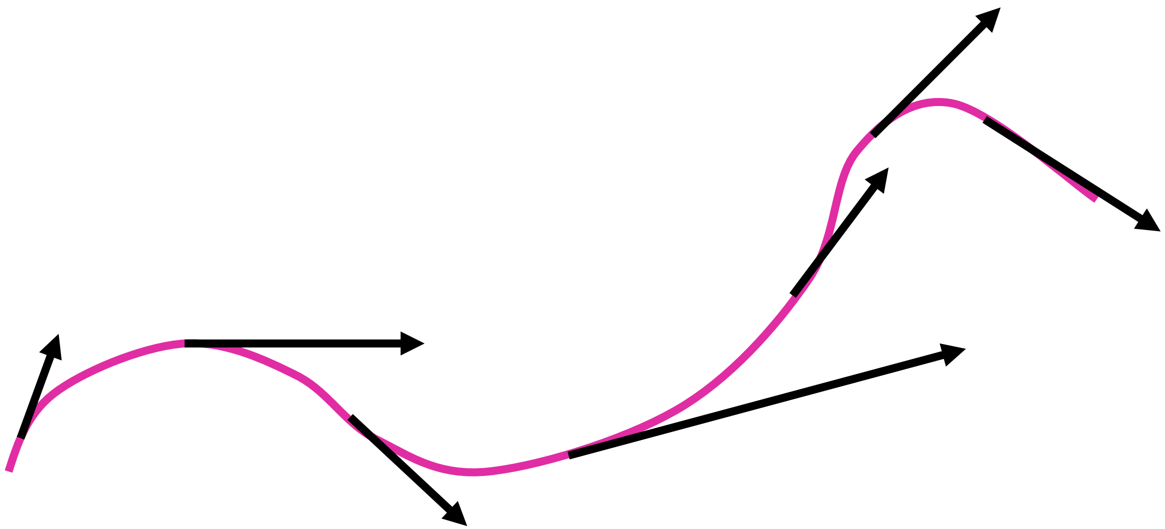
intensità

Limite del rapporto tra le quantità infinitesime Δs e Δt

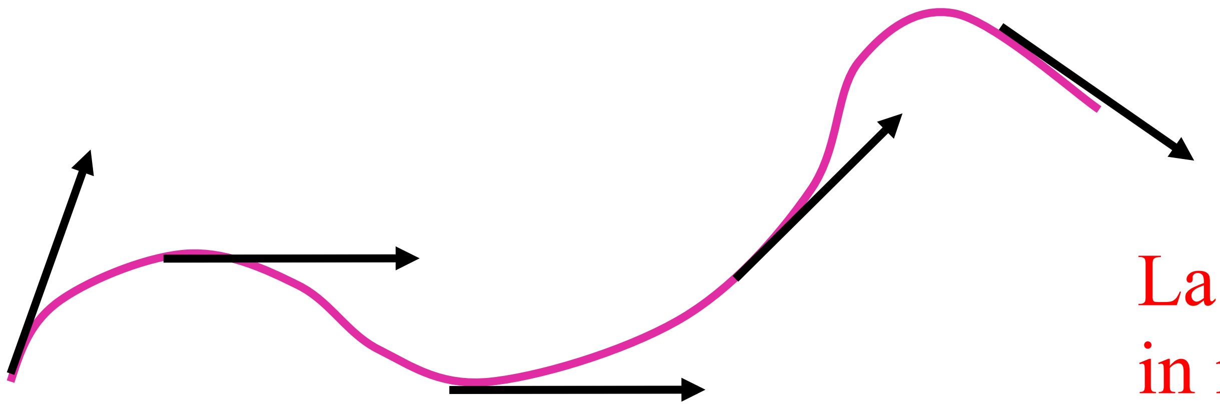
verso

coincidente con quello di Δs

Ad ogni punto della traiettoria è associato un vettore velocità avente la direzione della tangente, lunghezza proporzionale al modulo della velocità istantanea e verso coincidente con quello del moto.



La velocità varia
anche in intensità



La velocità è costante
in intensità

Moto uniforme:

velocità di <u>intensità</u> costante

rettilineo

La velocità è **costante** come **vettore** (infatti la direzione non cambia essendo quella della retta su cui avviene il moto)

curvilineo

La velocità **NON è costante** come **vettore** in quanto la sua direzione cambia in ogni punto della traiettoria

Esercizi

1) Il sig. Rossi compie un viaggio Roma – Viterbo – Roma (216 km complessivamente). Si ferma mezz'ora a Viterbo e rientra a Roma 3 ore dopo. La sua velocità media è :

a) 72km/h b) 0 c) 20m/s d) 86,4km/h e) i dati forniti non sono sufficienti

2) Quale delle seguenti affermazioni relative al moto di un punto materiale è corretta?

a) La legge oraria consente di determinare la traiettoria del moto

b) La velocità media è una grandezza scalare mentre quella istantanea è vettoriale

c) Qualunque sia la traiettoria in un moto uniforme la velocità è costante

d) Se in un moto la velocità è costante il moto è rettilineo uniforme

e) Se in un moto la velocità varia, esso avviene necessariamente su traiettoria curvilinea.

Risposte

1) Il sig. Rossi compie un viaggio Roma – Viterbo – Roma (216 km complessivamente). Si ferma mezz'ora a Viterbo e rientra a Roma 3 ore dopo. La sua velocità media è :

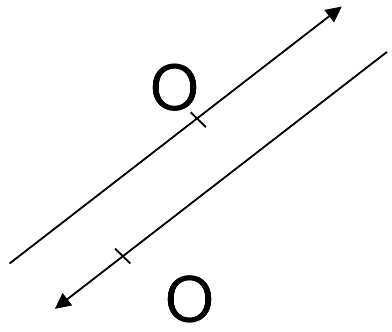
Poiché lo spostamento = **posizione finale – posizione iniziale** è nullo, **la risposta corretta è la b**

2) Quale delle seguenti affermazioni relative al moto di un punto materiale è corretta?

Occorre ricordare che la velocità è una grandezza vettoriale, quindi essa è costante se non varia né in intensità né in direzione.

La risposta corretta è la d

Moto rettilineo



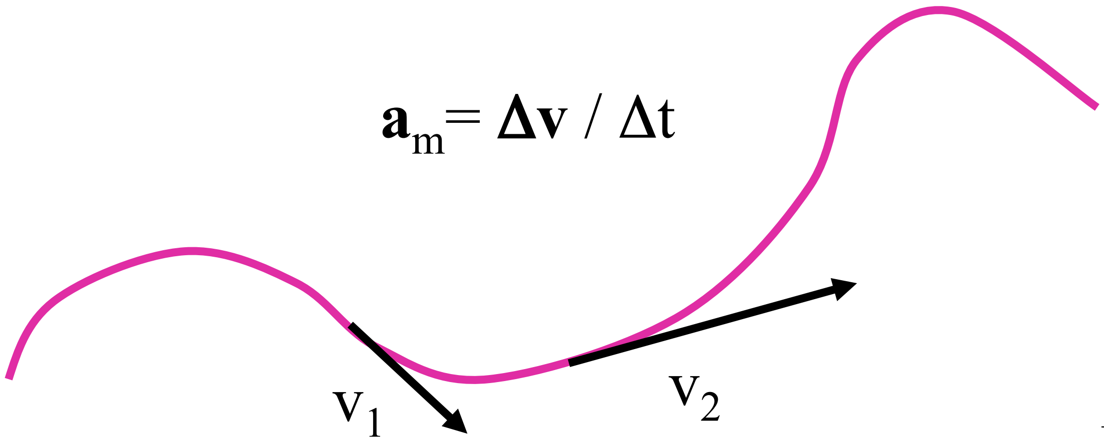
- Si svolge lungo una retta su cui si definisce la coordinata *x*, la cui origine (*x*=0) e il cui verso sono arbitrari
- Anche l'origine dei tempi (*t*=0) e` arbitraria
- Il moto del corpo e` descrivibile con una sola funzione *x(t)*
- La funzione puo` essere rappresentata sul cosiddetto <u>diagramma orario</u>, sul cui asse delle ascisse poniamo *t* e su quello delle ordinate *x*

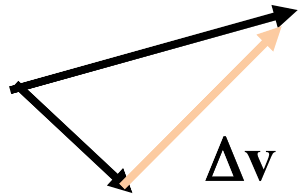
Accelerazione : grandezza vettoriale che esprime la rapidità di variazione della velocità nel tempo.

Accelerazione media

Dal rapporto tra la variazione di velocità relativa ad un certo intervallo di tempo e l' intervallo di tempo stesso

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{\Delta v} \,/\, \Delta t$$





Direzione e verso di $\mathbf{a}_m$

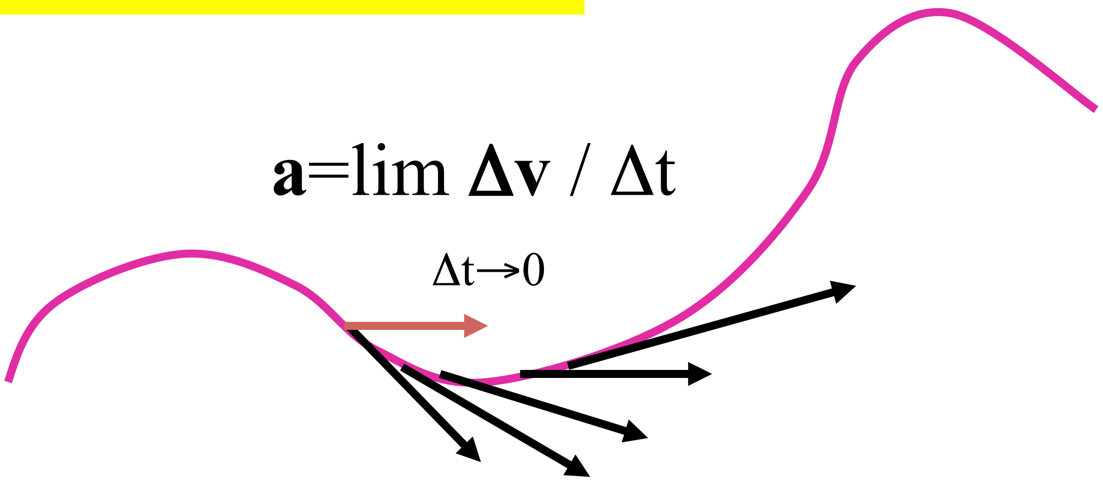
Accelerazione istantanea

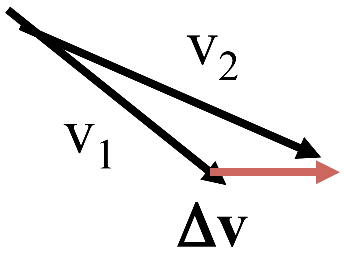
valore limite a cui tende la accelerazione media calcolandola su intervalli di tempo sempre più piccoli

$$\mathbf{a}=\lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{\Delta v} / \Delta t$$

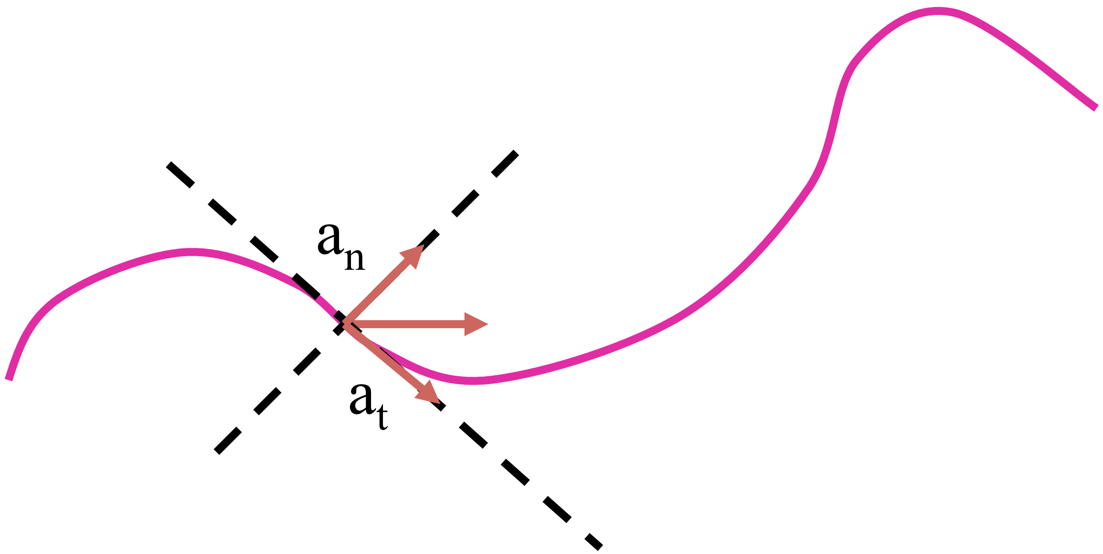
L'accelerazione non è diretta nel senso del moto

$$\mathbf{a}=\lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{\Delta v} / \Delta t$$

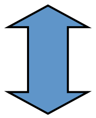




Le componenti dell' accelerazione



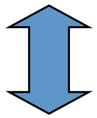
Componente tangenziale



Variazione modulo di **v**

a_t=componente tangenziale

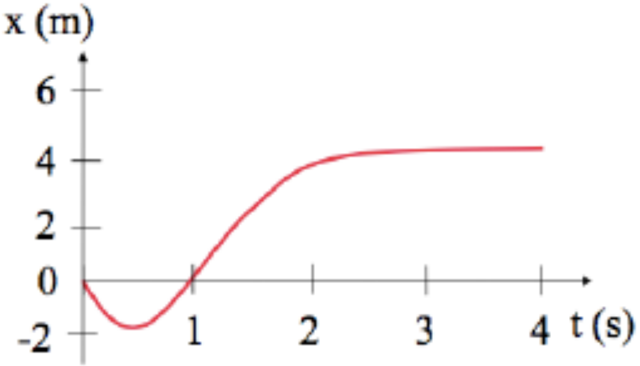
Componente normale



Variazione direzione di **v**

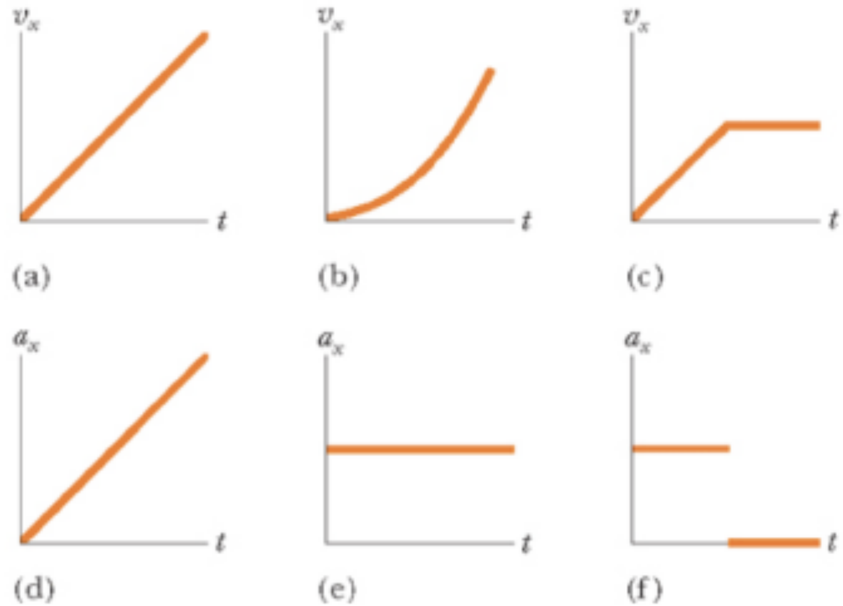
a_n=componente normale

QUIZ



Quanto vale la velocità media nei primi 4 secondi? E la velocità istantanea nell'istante $t = 4$ s ?

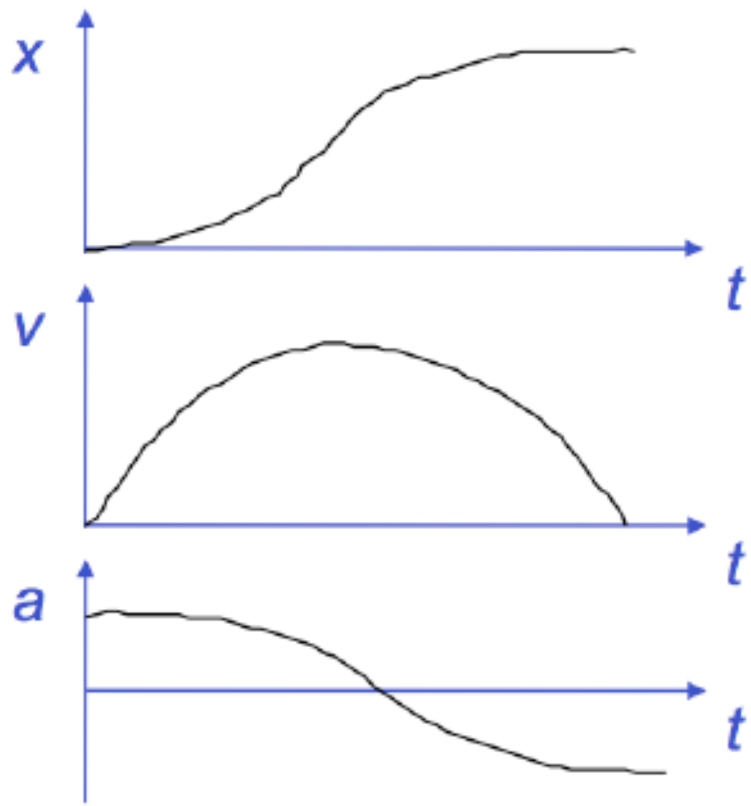
Qual è l'accoppiamento corretto fra grafici di velocità e di accelerazione qui accanto?



Riassunto

Se conosciamo la posizione $x(t)$ in funzione del tempo, possiamo determinare velocità e acelerazione in funzione del tempo come:

$$x = x(t)$$
$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$



Esempio: La posizione di una particella sull'asse x è data dalla funzione: $x = 8t^2 - 6t + 4$, dove le unità di misura sono m per x, s per t. Trovare le funzioni $v(t)$ e $a(t)$ della particella.

Richiamo calcolo derivate

- Derivata della somma di funzioni:
$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x)$$

- Se α è costante, $\frac{d}{dx}(\alpha f)(x) = \alpha \frac{df}{dx}(x)$

- Derivata del prodotto di due funzioni:
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)\frac{df}{dx}(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$$

- Derivata di funzione di funzione:

$$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = \frac{df}{dg}(g(x))\frac{dg}{dx}(x)$$

funzione	derivata
$y = \alpha$	$y' = 0$
$y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = 1/\cos^2 x$
$y = \log x$	$y' = 1/x$
$y = e^x$	$y' = e^x$

Moto rettilineo		Moto curvilineo	
uniforme	vario	uniforme	vario
$\mathbf{a}_t=0$	$\mathbf{a}_t\neq 0$	$\mathbf{a}_t=0$	$\mathbf{a}_t\neq 0$
$\mathbf{a}_n=0$	$\mathbf{a}_n=0$	$\mathbf{a}_n\neq 0$	$\mathbf{a}_n\neq 0$
$\mathbf{a}=0$	$\mathbf{a}=\mathbf{a}_t$	$\mathbf{a}=\mathbf{a}_n$	$\mathbf{a}=\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_t$

Dimensioni e unità di misura

Velocità e accelerazione sono entrambe grandezze derivate

Equazione dimensionale velocità : $[v]=[L/T]=[LT^{-1}]$

Equazione dim. accelerazione : $[a]=[v/T]=[LT^{-1}/T]=[LT^{-2}]$

Unità di misura della velocità (S.I.) = m/s

Unità di misura della accelerazione (S.I.) = m/s^2

Esercizi

1) In un moto curvilineo uniforme i due vettori velocità e accelerazione sono:

a) Entrambi nulli
b) Perpendicolari
c) Paralleli
d) Nulla l'accelerazione e diversa da zero la velocità
e) L'accelerazione ha sia una componente tangenziale che una centripeta.

2) In 20 secondi la velocità di uno sciatore aumenta da 72 km/h a 90 Km/h. Qual è la sua accelerazione?

a) 4 m/s^2
b) 0,9 m/s^2
c) 11 m/s^2
d) 0,25 m/s^2
e) 2,5 m/s^2

Risposte

1) Se un moto avviene con velocità costante in modulo, la componente tangenziale dell'accelerazione che è responsabile di tale variazione, sarà nulla.

La risposta corretta è la b

2) In 20 secondi la velocità aumenta da 72 km/h a 90 Km/h.
Usando le unità di misura del S.I.
$\Delta v = 18(1000/3600)$ m/s = 5m/s e quindi
a= 5/20 m/s^2 = 0,25 m/s^2

la risposta corretta è la d

Moto rett. uniforme e uniformemente accellerato

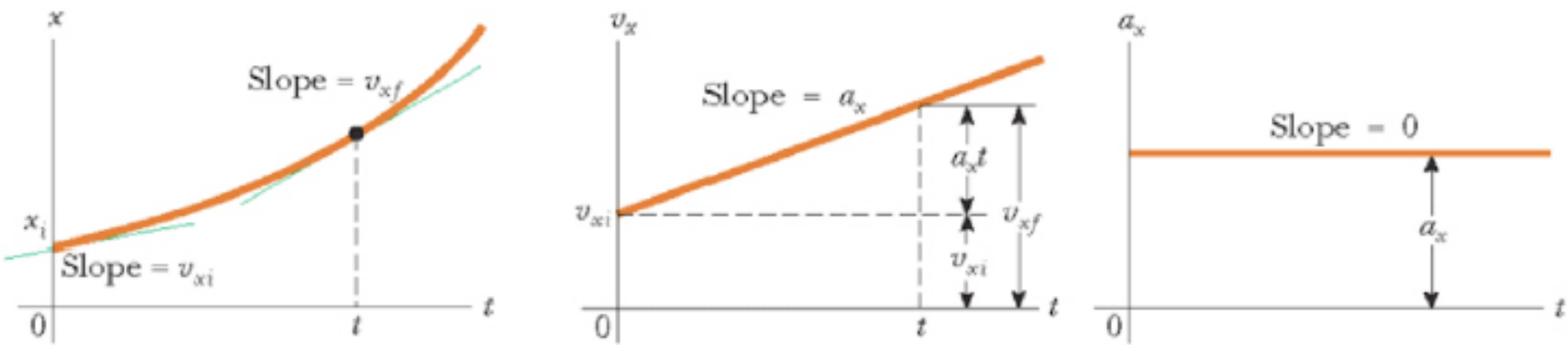
Moto *rettilineo uniforme*:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + vt \\
v &= \text{costante} \\
a &= 0
\end{aligned}
$$

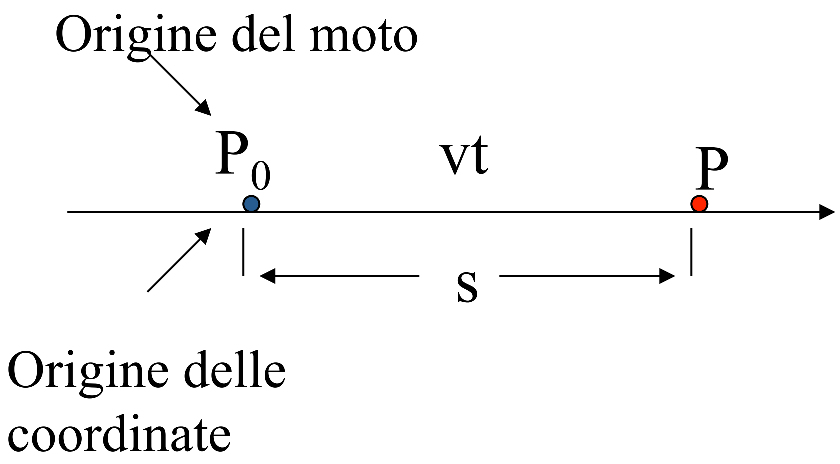
Moto *uniformemente accelerato*:

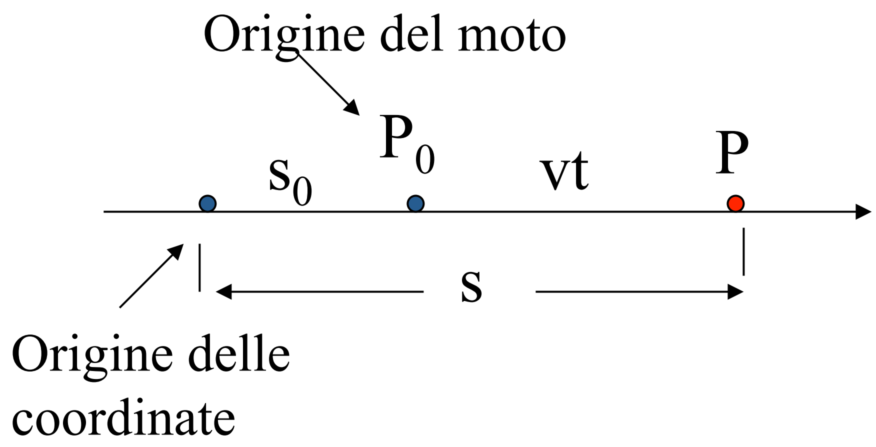
$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
v &= v_0 + at \\
a &= \text{costante}
\end{aligned}
$$

Grafici di posizione, velocità, accelerazione in funzione del tempo per il moto uniformemente accelerato:



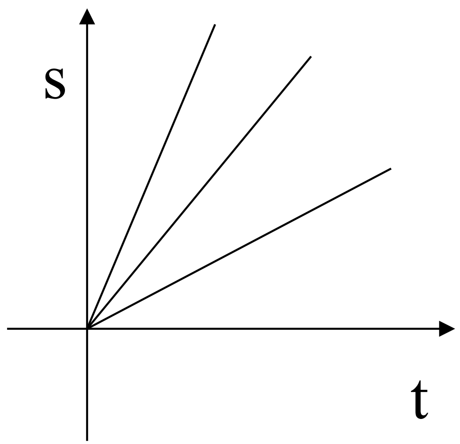
Moto uniforme: condizioni iniziali

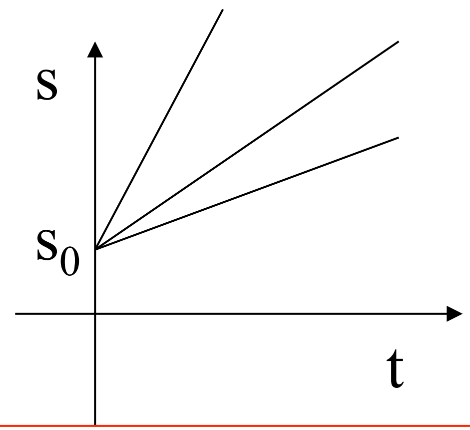




$$\mathbf{s = vt}$$

$$\mathbf{s = s_0 + vt}$$

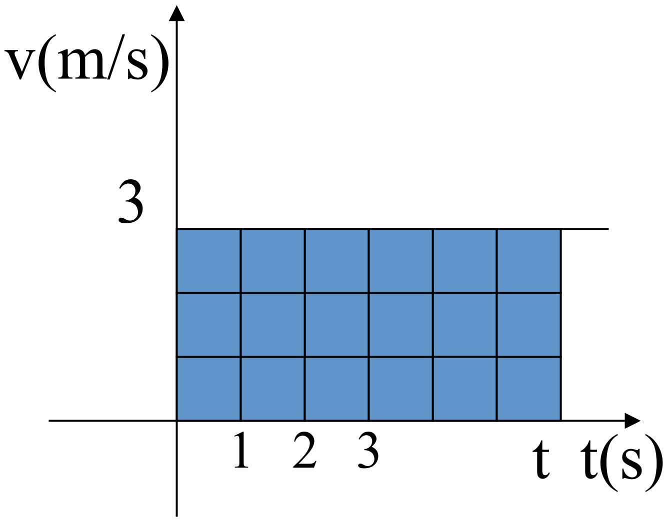




La pendenza della retta fornisce la velocità

Dalla velocità alla legge oraria

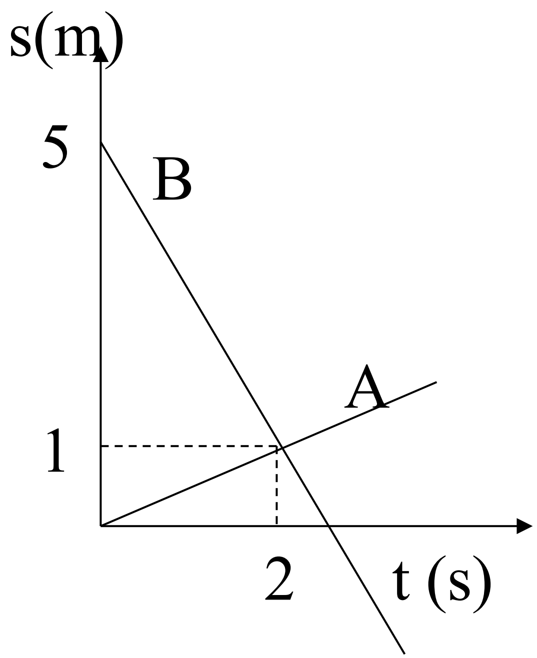
Nel moto rettilineo uniforme la velocità è costante ; dunque nel piani (v,t) essa è rappresentata da una retta parallela all'asse dei tempi, la cui quota indica la sua intensità :



tempo	distanza
1 s	3 m
2 s	6 m
3 s	9 m
..	..
t s	vt

La distanza percorsa nel tempo t può essere interpretata come l'area della regione piana compresa tra il diagramma della velocità, l'asse dei tempi e gli istanti di tempo iniziale e finale

Esercizi



1) Il seguente grafico rappresenta il moto rettilineo di due corpi. Quale delle affermazioni elencate è corretta?

a) I corpi si muovono in versi opposti e all'istante t=0 sono nell'origine della traiettoria

b) Il corpo A si muove con velocità crescente, il corpo B con velocità decrescente

c) Il corpo A all'istante t=0 si trova nell'origine, mentre il corpo B non passerà mai per l'origine della traiettoria

d) Dopo 2 secondi i due corpi si trovano nella stessa posizione

e) Dopo 2 secondi i due corpi hanno percorso lo stesso spazio

2) Un corpo si muove su una retta nel verso negativo con velocità costante di 3m/s; all'istante t=0 si trova a 2m dall'origine. La legge oraria del moto è :

a) $s = 2+3t$ b) $s = -2+3t$ c) $s = 2t-3$ d) $s = 2-3t$ e) $s = -2t+3$

Risposte

1) a) errata : il corpo B all' istante $t = 0$ è a 5m dall' origine

   b) errata : il moto di entrambi è con velocità costante

   c) errata : il corpo B passerà per l' origine dopo 2,5 secondi

   e) errata : il corpo A ha percorso 1m mentre il corpo B 4m

   La risposta corretta è la d

2) La legge oraria del moto rettilineo uniforme è $s=s_0+v_0t$. Nel nostro caso $s_0= 2$ e $v_0= -3$.

   La risposta corretta è la d

Relazioni nel moto uniformemente accellerato

Da $v = v_0 + at$, risolvendo rispetto a t: $t = \dfrac{v - v_0}{a}$

Da $x = x_0 + vt + \dfrac{1}{2}at^2$, sostituendo l'espressione per t prima trovata:

$$x = x_0 + v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

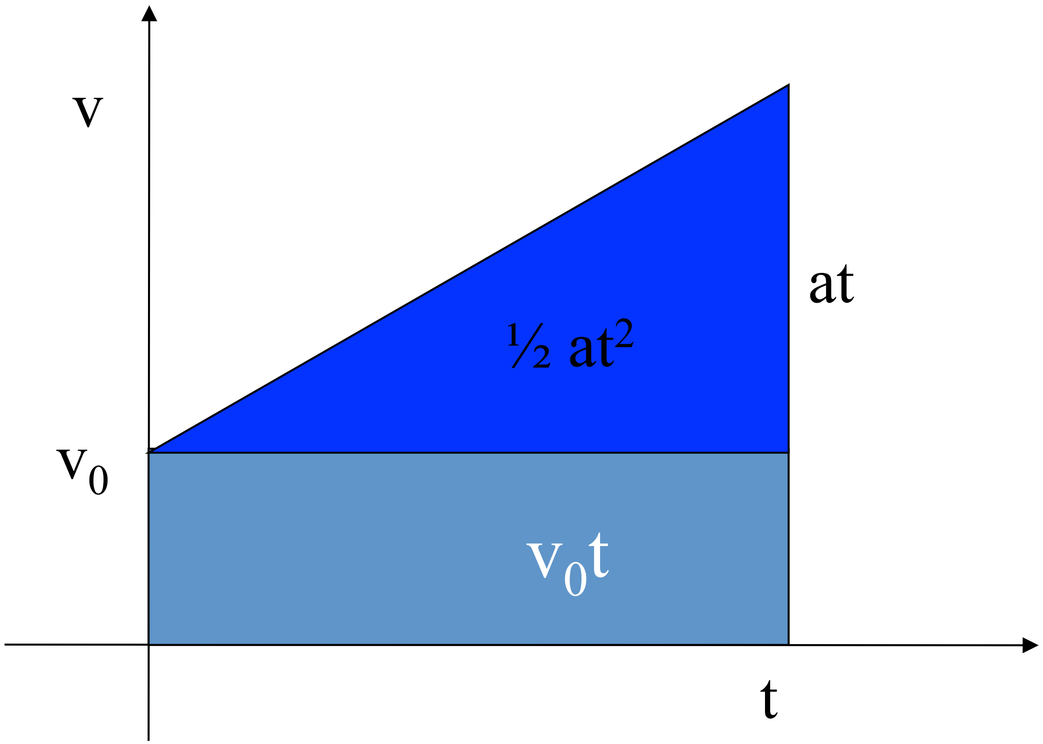
ovvero

$$x - x_0 = \left(v_0 + \frac{1}{2}a\frac{v - v_0}{a}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right)$$

da cui un'espressione che lega velocità e spazio percorso:

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$$

Legge oraria



$$s = v_0t + 1/2a\ t^2$$

$$s=s_0+ v_0t + 1/2a\ t^2$$

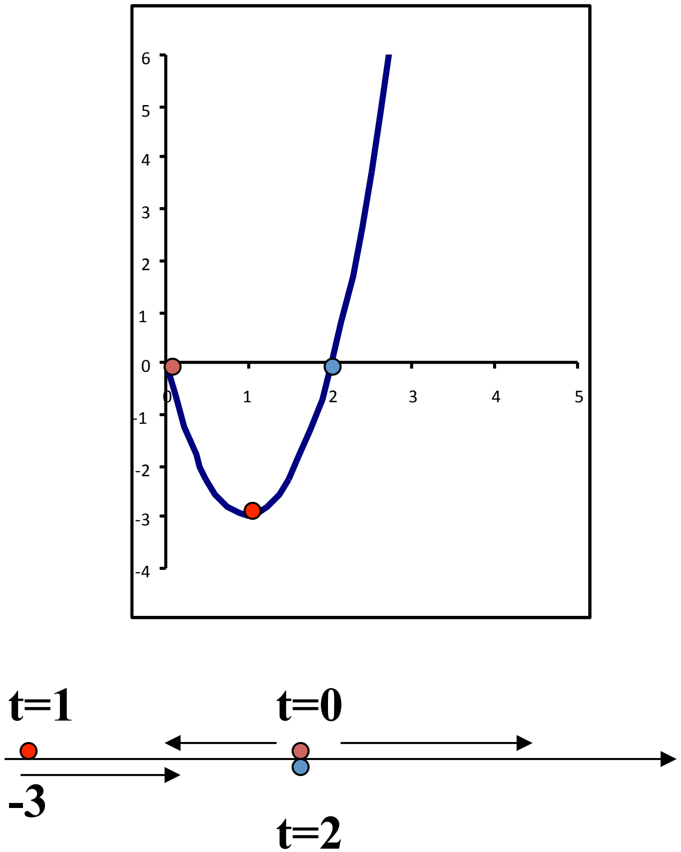
Nel caso in cui la velocità iniziale sia nulla si riducono a

$$s=1/2a\ t^2$$

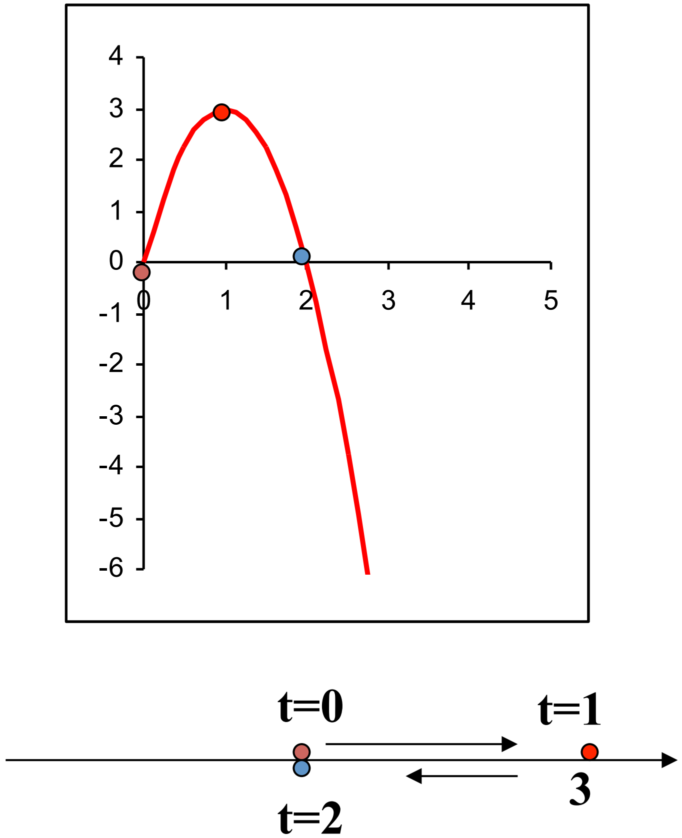
$$s = s_0 + 1/2a\ t^2$$

Altri diagrammi $\quad s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

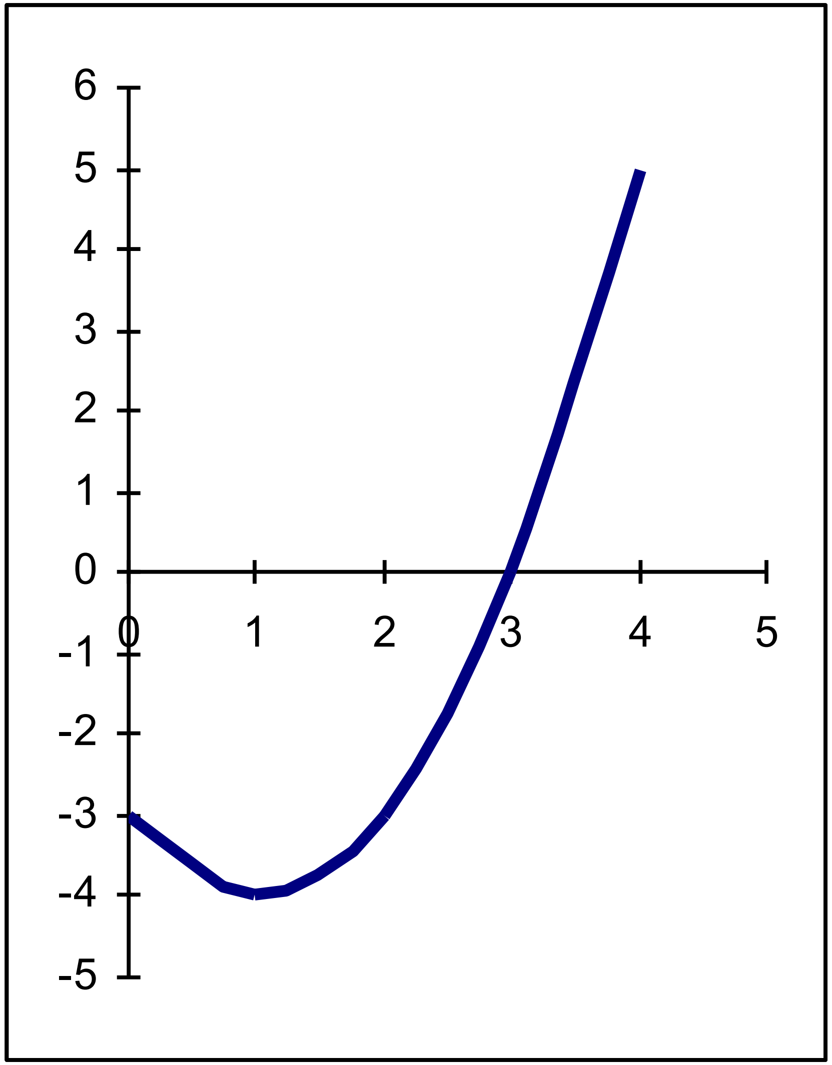
a>0



a<0

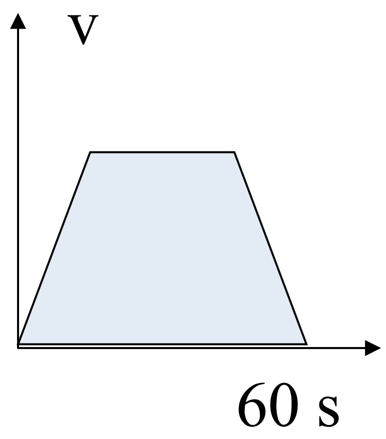


Il caso più generale : $\mathbf{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$



Esercizi

1) Nel diagramma della figura a lato è riportata la velocità di un'auto in funzione del tempo. Che cosa rappresenta l'area del trapezio?



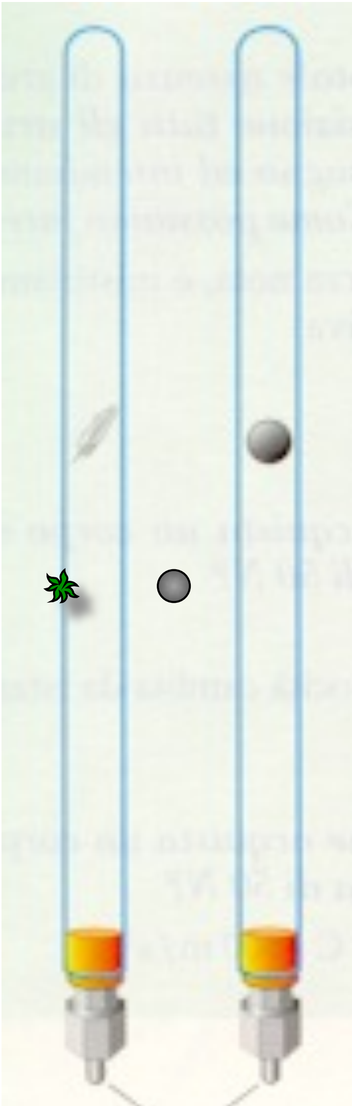
a) la velocità del corpo dopo 60 secondi
b) l'accelerazione del corpo al tempo t = 60 s
c) lo spazio percorso dal corpo in 60 secondi
d) la velocità media del corpo
e) fisicamente non rappresenta niente

Risposte

1) L'area della regione piana compresa tra il diagramma della velocità e l'asse dei tempi fornisce lo spazio percorso.

La risposta corretta è la c

Il moto di caduta dei gravi



Sperimentalmente si verifica che tutti i corpi, indipendentemente dal loro peso, in assenza di aria sono soggetti sulla superficie terrestre alla medesima accelerazione costante $g = 9{,}8 m/s^2$

Quindi il moto è rettilineo uniformemente accelerato

$$\mathbf{s = s_0 + v_0 t + 1/2 g\, t^2; \quad v = v_0 + gt; \quad a = g}$$

- Alle nostre latitudini, alla superficie terrestre: $g = 9.81 \mathrm{m/s}^2$
- All'equatore, $g = 9.78 \mathrm{m/s}^2$
- Al polo nord, $g = 9.83 \mathrm{m/s}^2$

Moto di un grave nel campo di gravità

- Specifichiamo le formule per il moto uniformemente accelerato nel caso di un corpo che cade da altezza *h* con velocità iniziale nulla: $x_0=h,\ v_0=0,\ t_0=0$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) = -gt \qquad x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

- La seconda formula ci permette, risolvendo rispetto a *t*, di trovare il tempo in cui il corpo raggiunge il suolo, cioè il punto $x=0$:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Moto di un grave nel campo di gravità

- Ora che e`noto il tempo di caduta, la prima formula ci permette di trovare la velocità con cui il corpo giunge a terra:

$$v(t) = -\sqrt{2gh}$$

- Spesso si omette il segno meno:

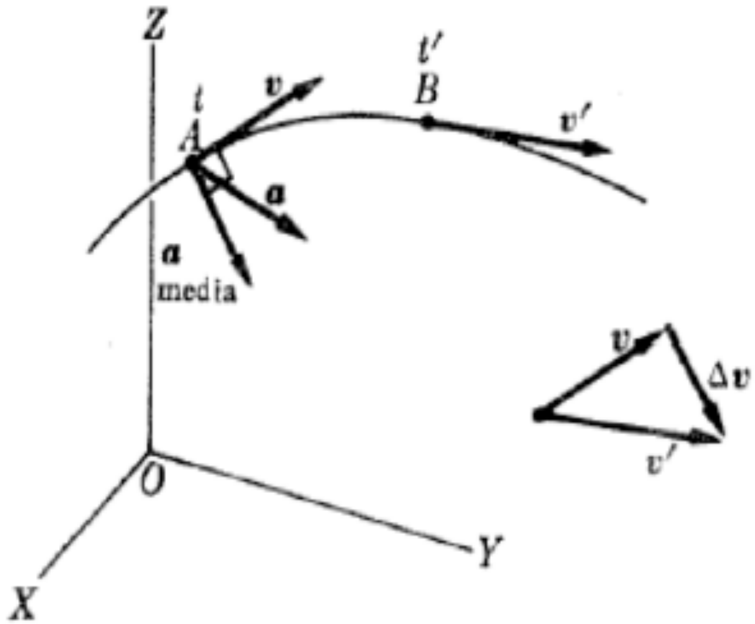
$$v(t) = \sqrt{2gh}$$

- intendendo che ci si riferisce al <u>modulo</u> della velocita`

Moto Curvilineo

- In generale, in un moto curvilineo, la velocità cambia *sia in modulo che in direzione*: l'accelerazione può essere non nulla anche se il modulo della velocità non cambia.

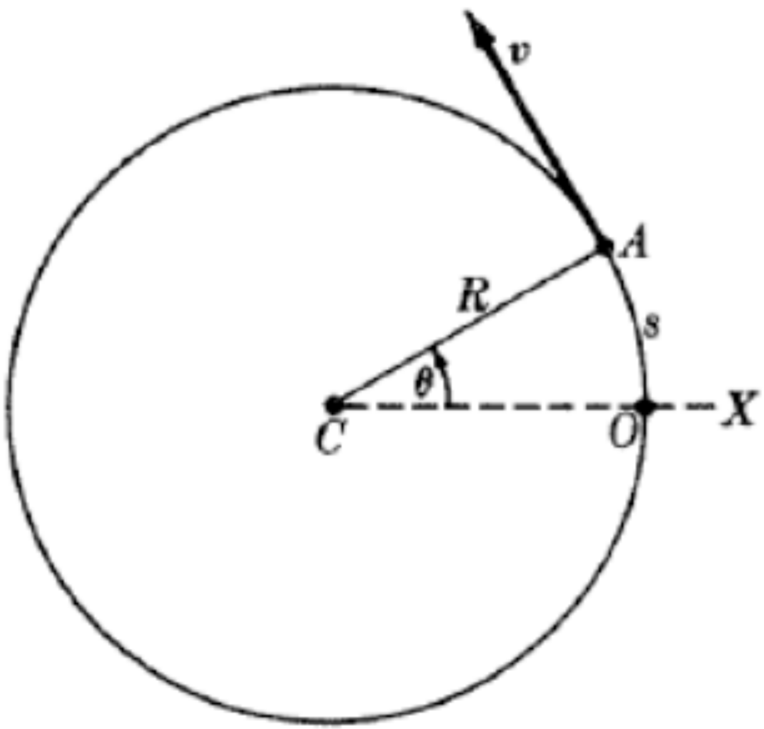
- L'accelerazione è un vettore *nella direzione della variazione della velocità*. Poiché la velocità cambia nella direzione in cui la traiettoria s'incurva, l'accelerazione è sempre diretta verso la *concavità* della traiettoria



Moto Circolare

Moto caratterizzato da $\vec{v} \perp \vec{R}$, con R costante. Introduciamo la distanza percorsa lungo la circonferenza, $s = R\theta$:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$



La grandezza $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ è detta *velocità angolare*, si misura in radianti/s o in s^{-1}.

Moto circolare *uniforme:* caratterizzato da velocità angolare ω costante.

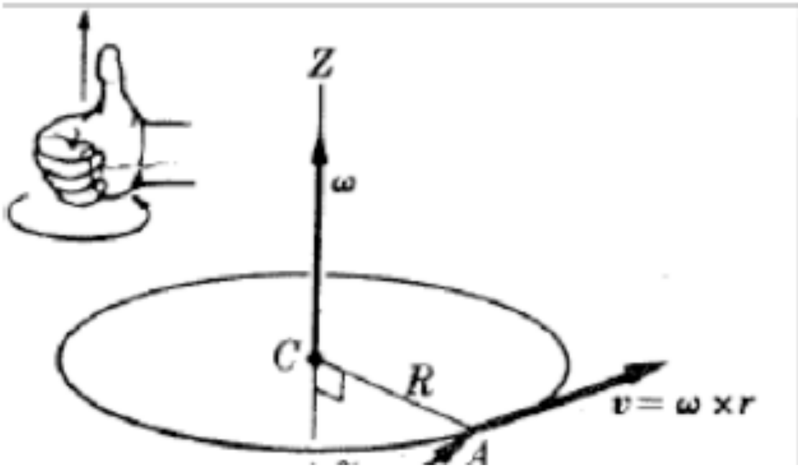
Periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, tempo necessario per fare un giro completo.

Frequenza: $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$, numero di giri per unità di tempo.

Velocità angolare come vettore

La velocità angolare può essere definita come un vettore di modulo ω, direzione perpendicolare al piano del moto, verso secondo la regola della mano destra. Con queste convenzioni:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$



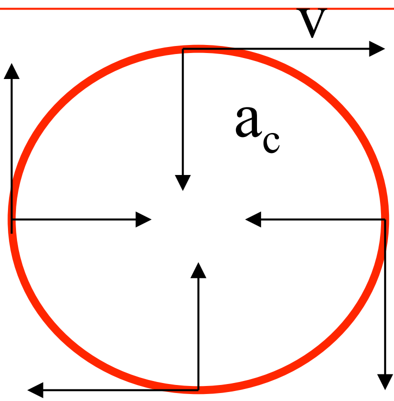
Moto Periodico

a determinati intervalli di tempo vengono riprodotte le stesse situazioni di movimento (posizione, velocità, accelerazione)

Moto Circolare Uniforme

Traiettoria: circonferenza

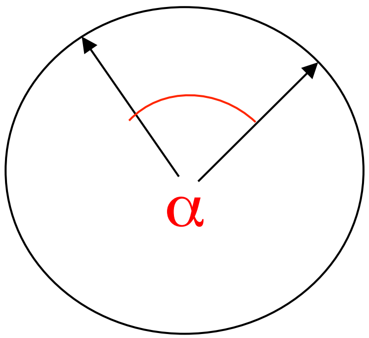
velocità lineare costante in **modulo**



ma

velocità **cambia** in direzione

accelerazione centripeta



velocità angolare $\omega = \alpha/t = 2\pi/T$ costante

ALTRE GRANDEZZE DEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$v = 2\pi r/T$ = velocità periferica

$a_c = v^2/r = (4\pi^2/T^2)r$

$v = \omega r$

$a_c = \omega^2 r$

v è proporzionale ad r

a_c è proporzionale ad r

GRANDEZZE TIPICHE DEI MOTI PERIODICI

T = periodo tempo impiegato a percorrere un giro

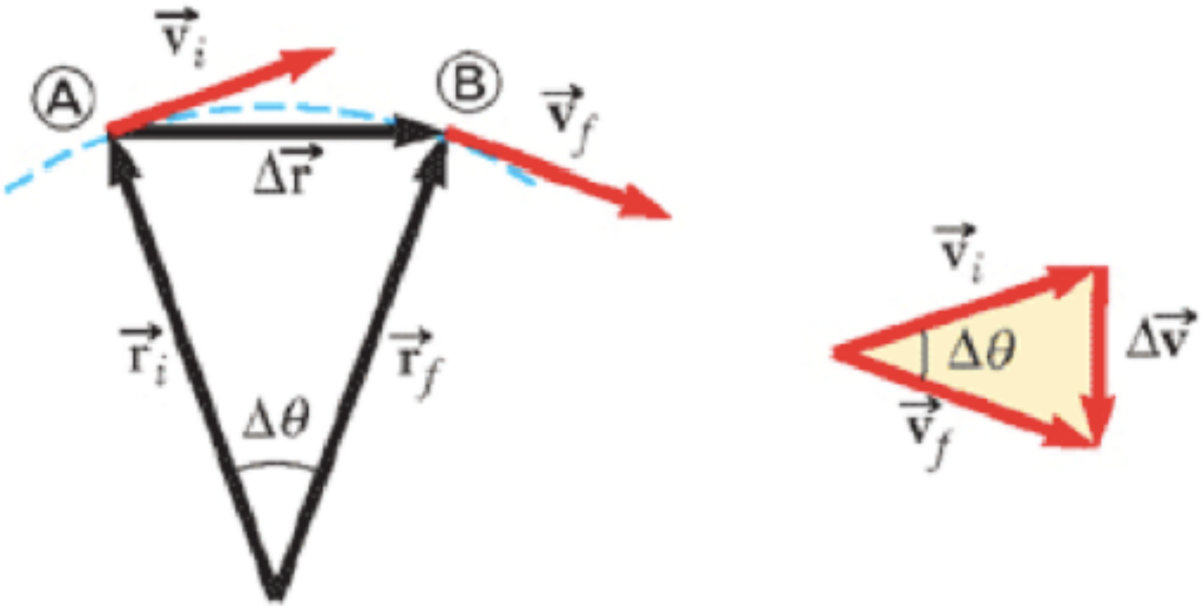
dimensione = t unità di misura : secondo

dalla proporzione : 1 giro : T sec = ν giri : 1 sec si ottiene

ν = frequenza = 1/T la frequenza è l'inverso del periodo

dimensione = t^{-1} unità di misura : hertz (Hz)

Velocità e accelerazione nel moto circolare uniforme



- Dal disegno sopra si vede che $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ tende ad un vettore di modulo $v\Delta\theta = v\omega\Delta t = (v^2/r)\Delta t$, diretto verso il centro
- l'accelerazione è quindi *centripeta* e di modulo $\boxed{a_C = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$.

Moto circolare: Esempio

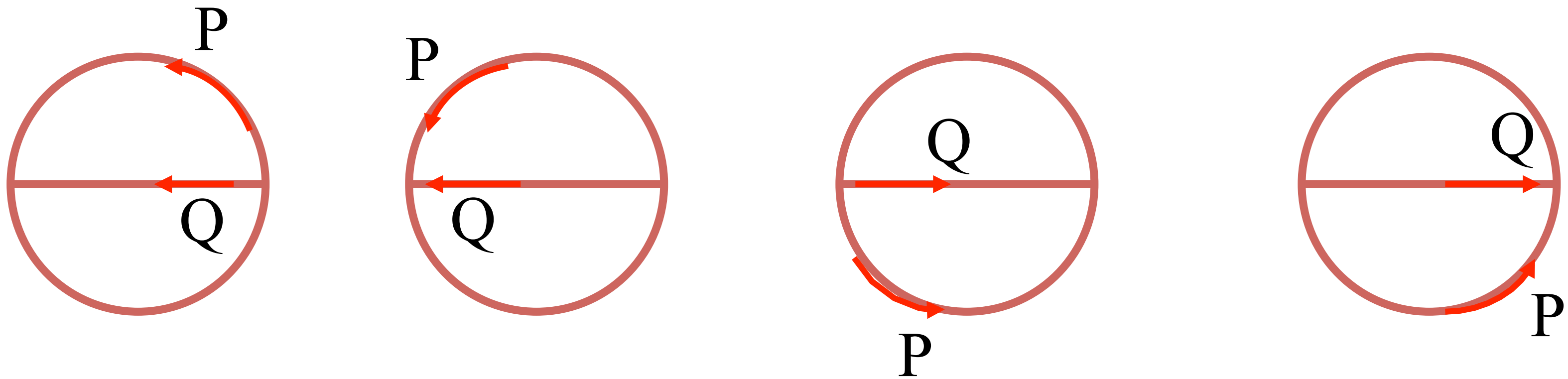
Il rotore di una centrifuga ruota a 3000 giri/min. A quanti radianti al secondo equivale questa velocità angolare? Sapendo che il rotore ha un diametro di 30 cm, calcolare il modulo della velocità tangenziale e dell'accelerazione centripeta.

Un giro del rotore è uguale a 2π radianti, dunque la velocità angolare è:
ω = 3000 2π (rad/min) = 6000π rad/min = 100π rad/sec.

Il modulo della velocità tangenziale è ω r:
v = (2π r / T) = ω r da cui si ottiene: v = 100π rad/sec 0,15 m = 15π m/sec

Il modulo dell'accelerazione centripeta è $\omega^2 r = v^2/r = 15000 m/sec^2$.

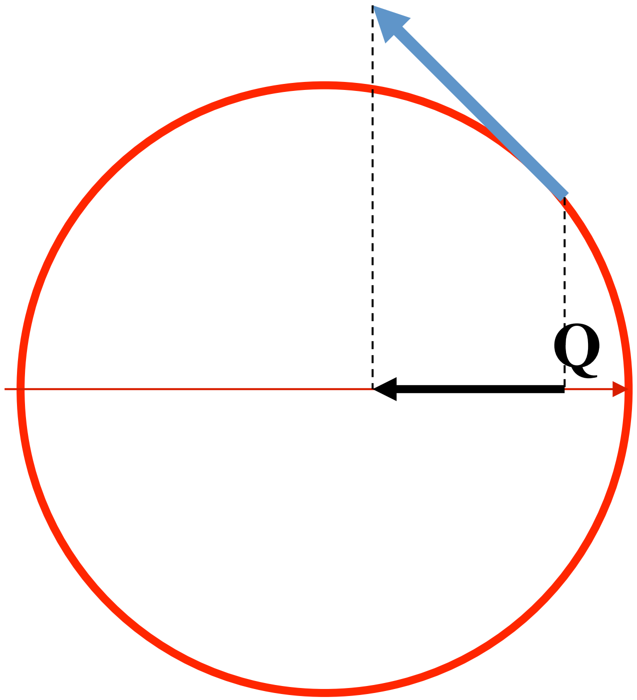
Moto armonico

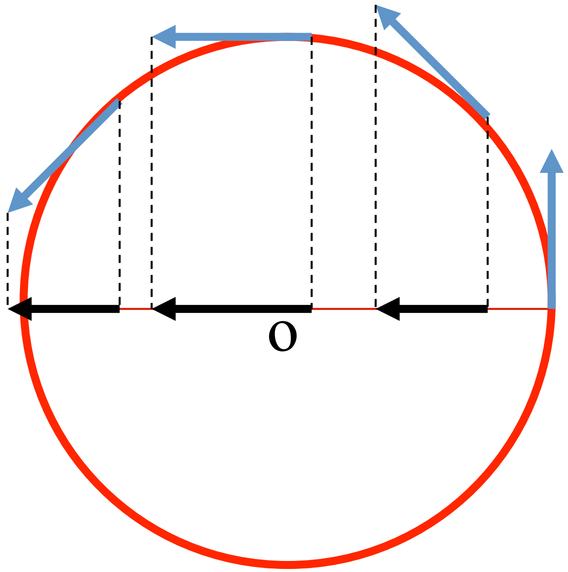


Mentre il punto P descrive la circonferenza di moto uniforme la sua peoiezione Q sul diametro si sposta avanti e indietro con moto armonico.

Il moto è un moto rettilineo vario, ovvero con velocità e accelerazioni variabili, ed è periodico.

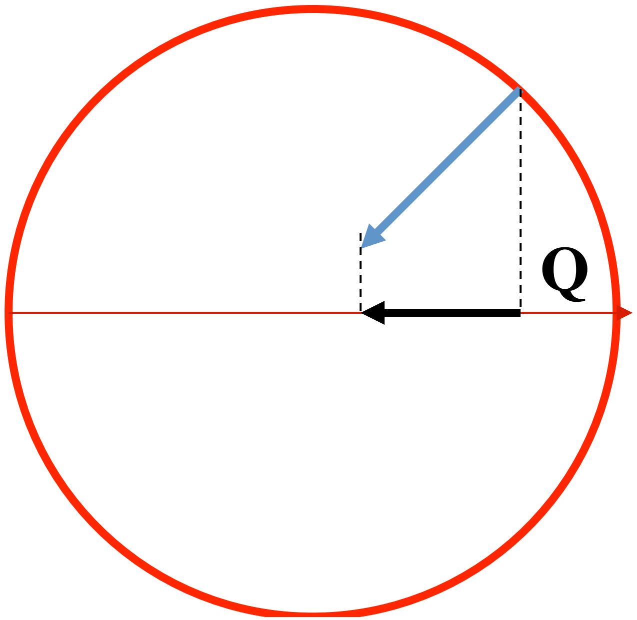
velocità

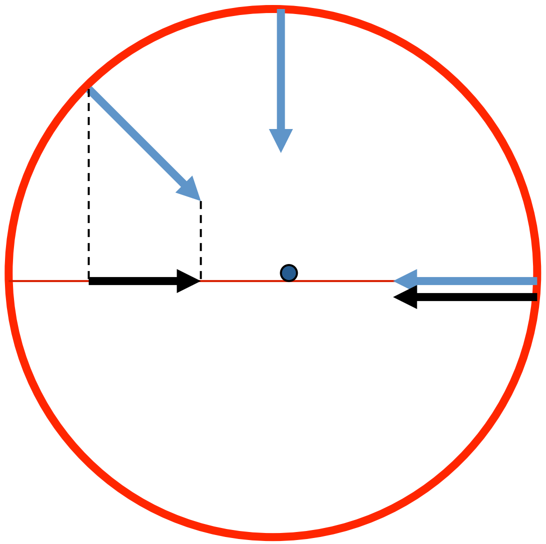




Massima al centro, nulla agli estremi

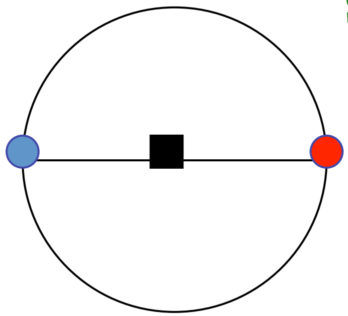
accelerazione



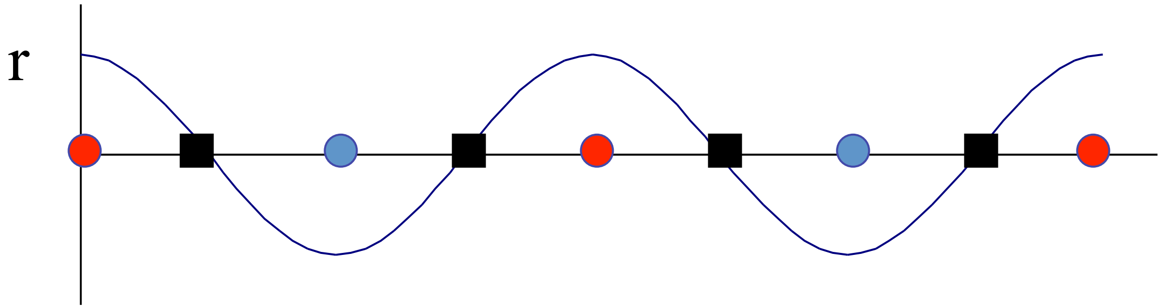


Nulla al centro, massima agli estremi

Leggi del moto armonico

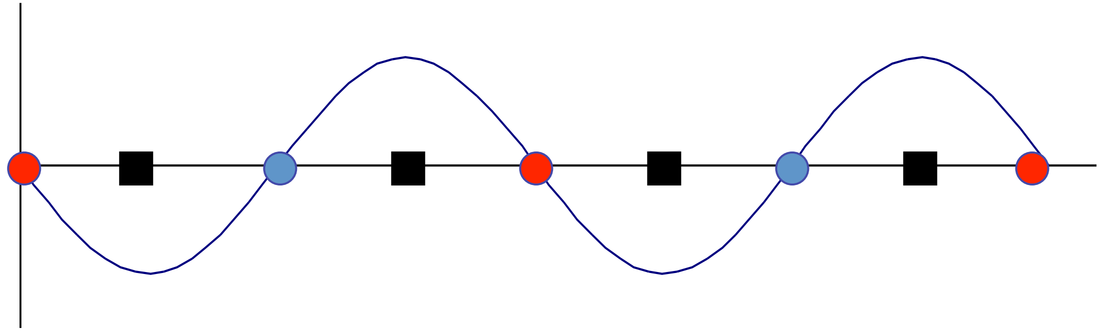


$s = r\cos(\omega t)$



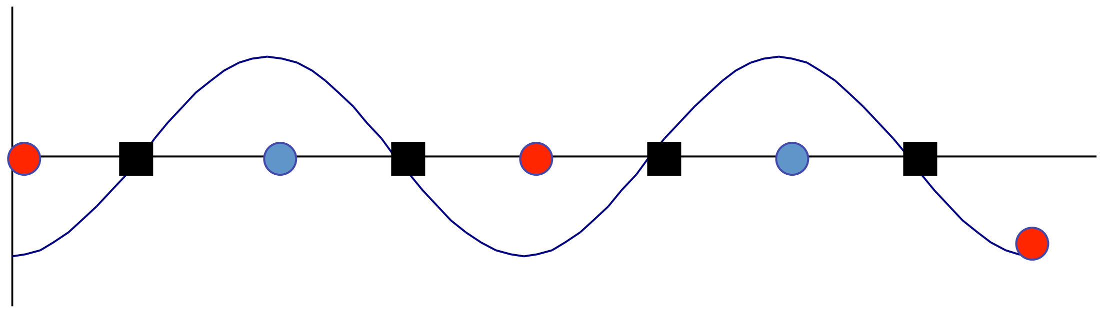
$v = -\omega\, r\, \mathrm{sen}(\omega t)$

La velocità aumenta verso il centro, dove è massima



$a = -\omega^2 r\cos(\omega t) = -\omega^2 s$

L'accelerazione è massima agli estremi,



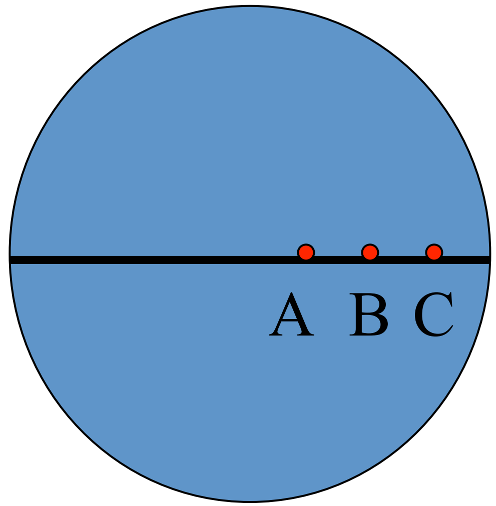
L'accelerazione è proporzionale allo spostamento, ma ha verso contrario:

$$a = -\omega^2 s$$

Esercizi

1) **Un disco ruota di moto circolare uniforme intorno al suo centro. I tre punti A, B, C hanno uguali:**

a) Frequenza e velocità tangenziale
b) Velocità angolare e accelerazione centripeta
c) Velocità angolare e periodo
d) Velocità tangenziale e periodo
e) Velocità tangenziale e accelerazione centripeta



2) **Quale delle seguenti affermazioni relative al moto armonico di un punto materiale è errata?**

a) La velocità è nulla agli estremi di oscillazione
b) L'accelerazione è massima agli estremi di oscillazione
c) L'accelerazione è proporzionale allo spostamento
d) L'accelerazione e la velocità hanno sempre lo stesso segno
e) Il punto materiale accelera quando si muove verso il centro.

Risposte

1) La velocità tangenziale e l'accelerazione sono entrambe proporzionali al raggio e quindi variano al variare del punto, mentre periodo, frequenza e velocità angolare ne sono indipendenti.

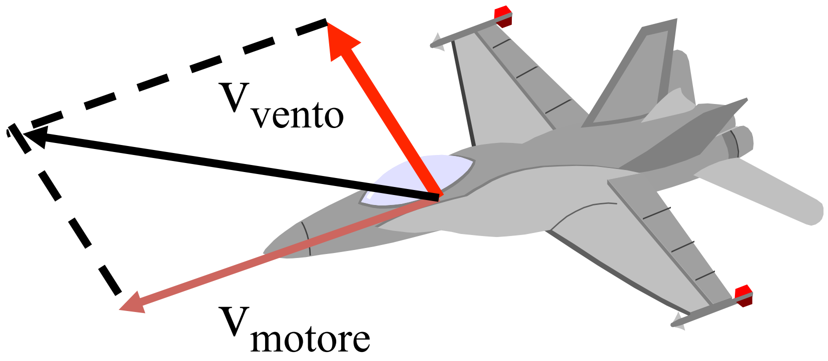
   La risposta corretta è la c

2) Il moto armonico è alternativamente accelerato e decelerato; in fase di accelerazione la velocità e l'accelerazione hanno lo stesso segno, in fase di decelerazione segno opposto.

   L'unica affermazione errata è la d

Composizione di moti simultanei

Quando un punto materiale è soggetto a due o più moti contemporanei il suo **spostamento è dato dalla somma vettoriale degli spostamenti** dovuti ai singoli moti e la sua **velocità è la somma vettoriale delle velocità dei singoli moti.**



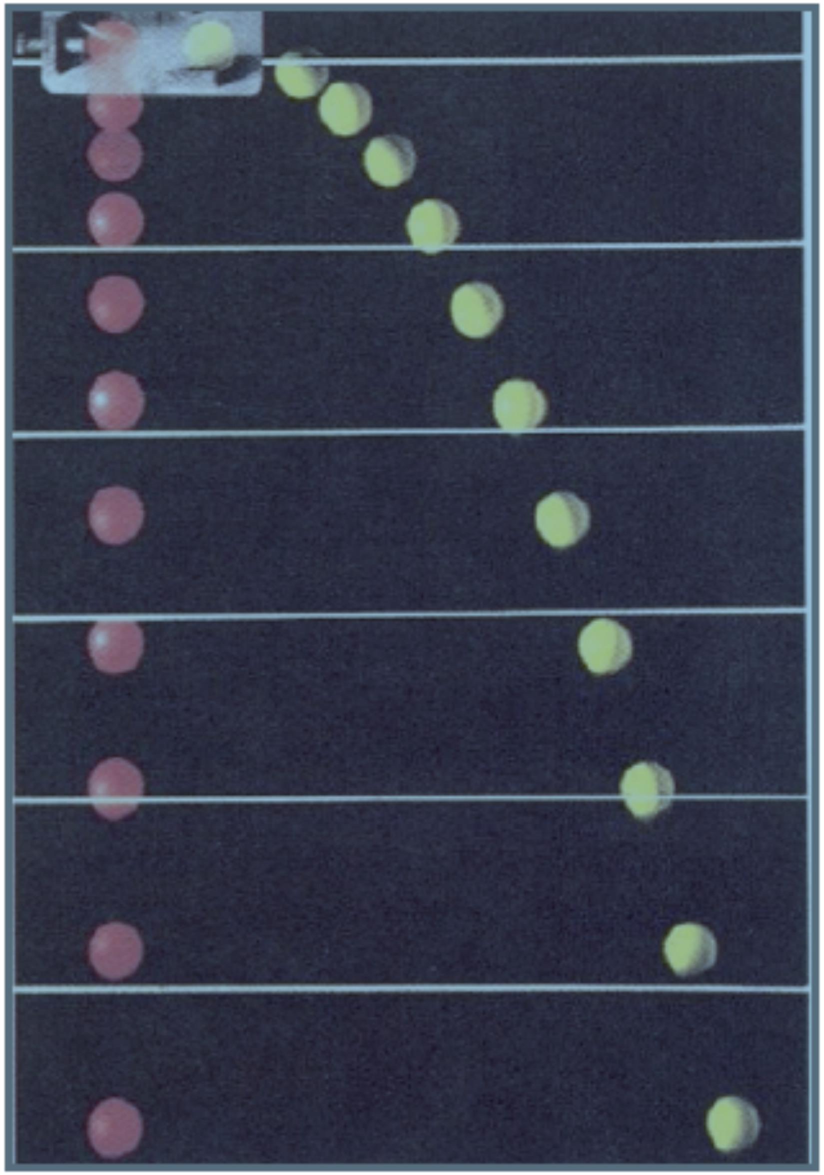
La composizione di due moti rettilinei e uniformi è un moto rettilineo uniforme

Moto dei proiettili

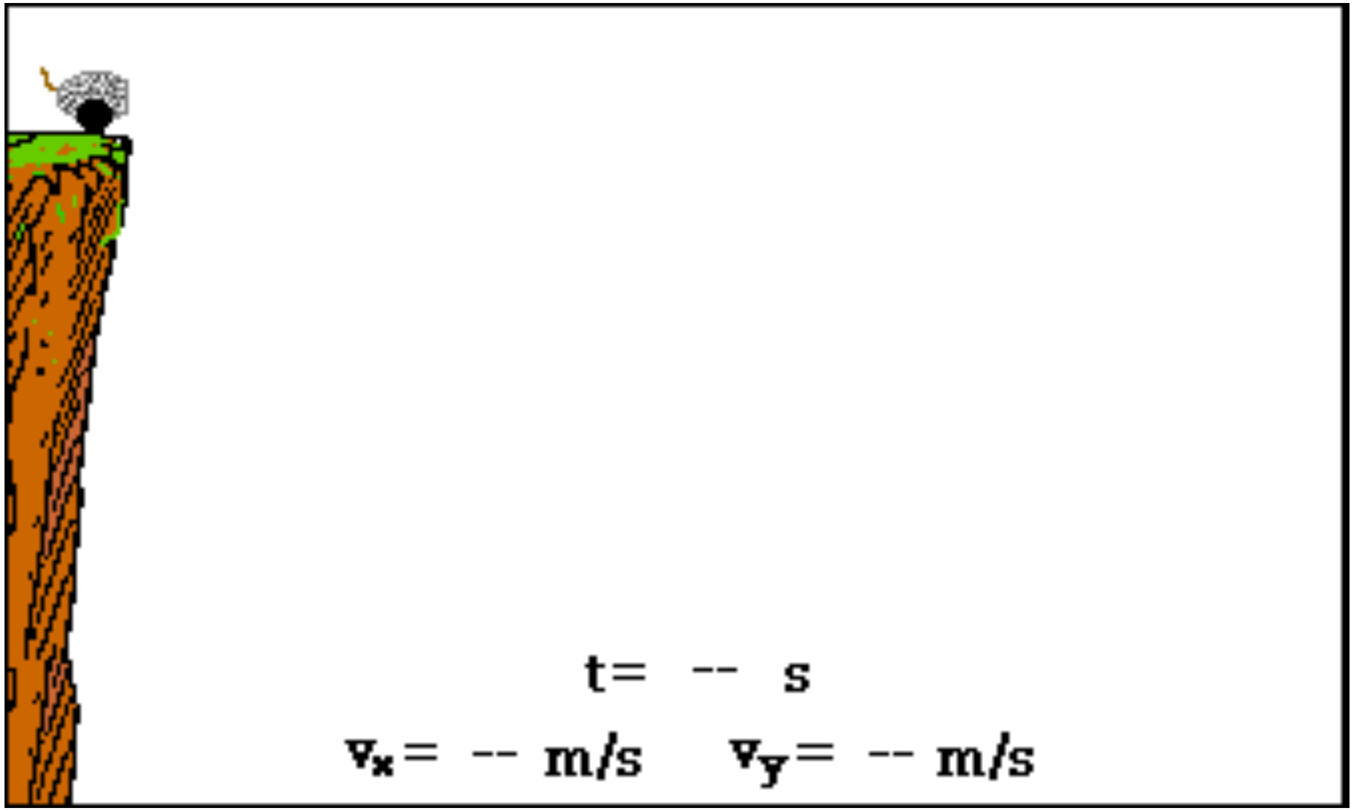
- E' il moto di particelle che vengono lanciate con velocità iniziale $\vec{v}_0$ e sono soggette alla sola accelerazione di gravità $\vec{g}$ supposta costante.

- La pallina rossa viene lasciata cadere da ferma nello stesso istante in cui l'altra è lanciata orizzontalmente verso destra con velocità $\vec{v}_0$.

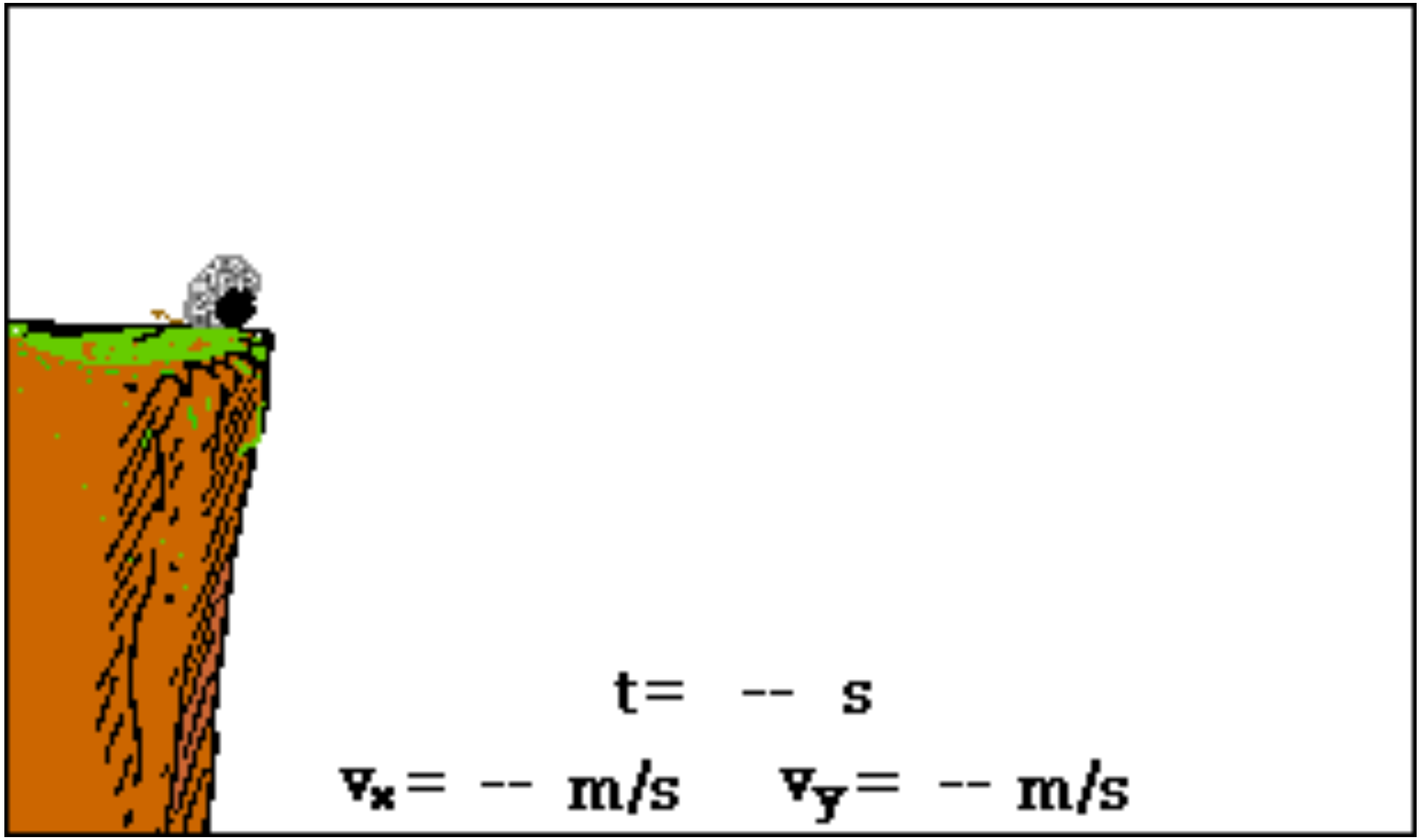
- Osservazioni sperimentali:
  – gli spostamenti verticali delle due palline sono identici
  – Il moto orizzontale e il moto verticale sono indipendenti



Lancio con velocità orizzontale

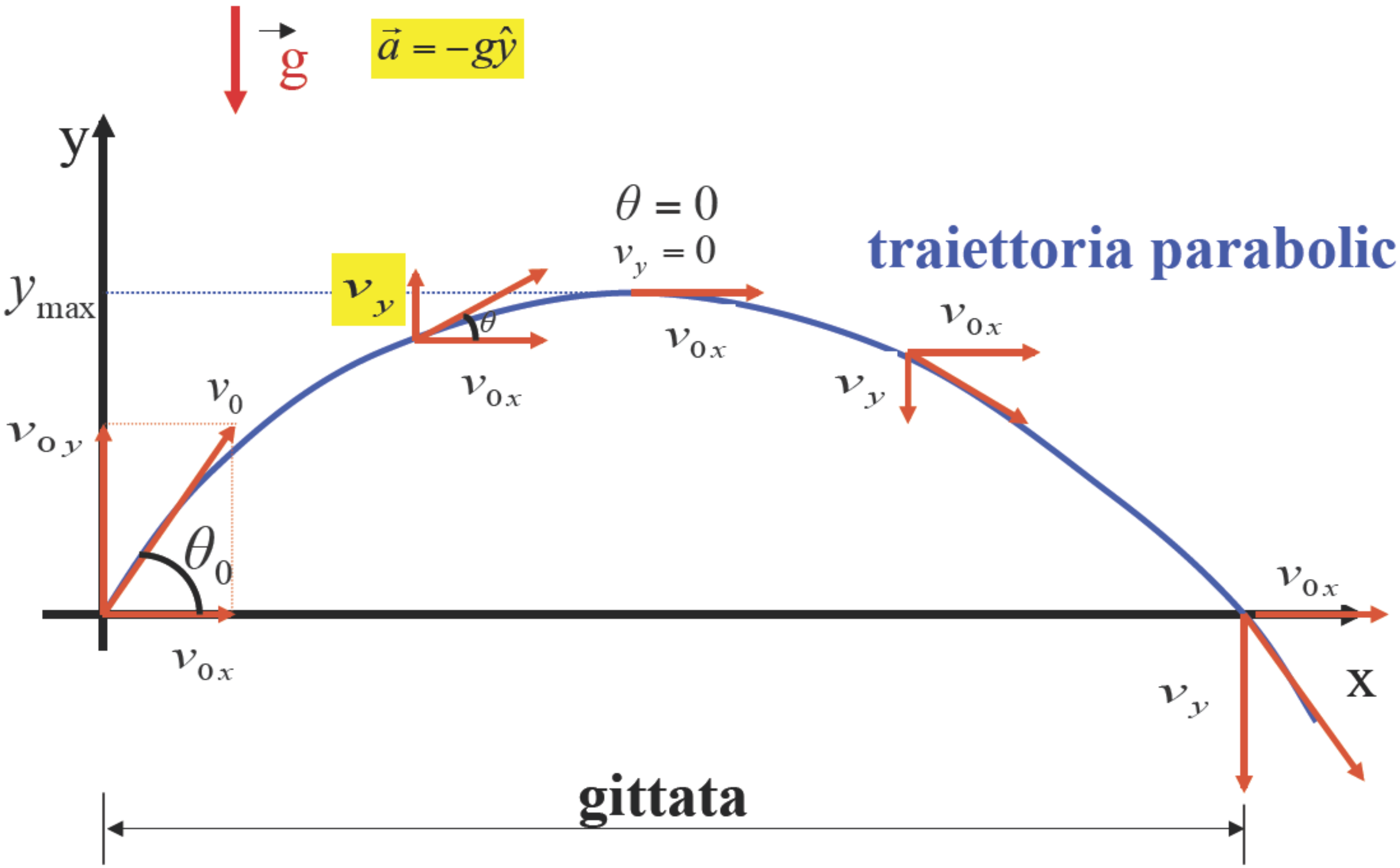


Lancio con velocità verticale



Analisi del moto dei proiettili

Il moto può essere analizzato separatamente nelle sue componenti:
– la componente orizzontale è descritta dalle relazioni cinematiche del moto rettilineo uniforme
– quella verticale dalle relazioni del moto uniformemente accelerato.



Analisi del moto dei proiettili

Analizziamo separatamente il moto *orizzontale*:

$$a_x = 0, \qquad v_x = v_{0x} = \text{cost}, \qquad x = x_0 + v_{0x}t$$

e il moto *verticale*:

$$a_y = -g, \qquad v_y = v_{0y} - gt, \qquad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Determiniamo la *traiettoria*: il luogo geometrico dei punti occupati dal vettore posizione $\vec{r}(t)$ nel corso del tempo.

Equazione della traiettoria

Eliminiamo t fra le equazioni del moto per $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{1}{2}g\frac{(x - x_0)^2}{v_{0x}^2}$$

Ponendo $v_{0x} = v_0 \cos\theta$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta$, $x_0 = y_0 = 0$, otteniamo:

$$\boxed{y = x \tan\theta - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2}x^2}$$

Questa è l'equazione di una *parabola*: la traiettoria è parabolica.

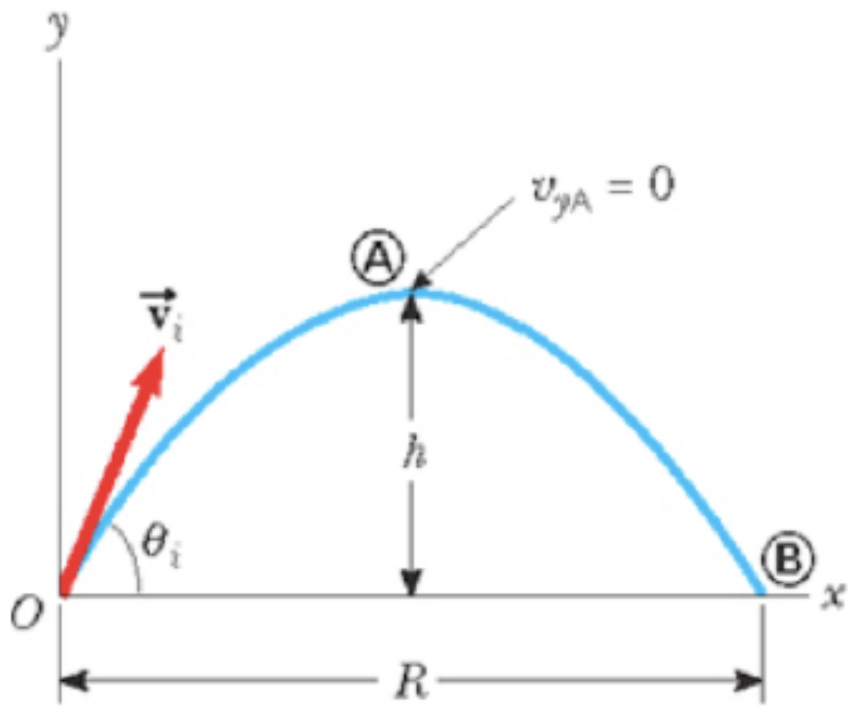
Gittata

Distanza orizzontale coperta dal proietto all'istante in cui tocca il suolo:

$$y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

Soluzioni: $t = 0$, oppure

$$t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$



Sostituendo quest'ultimo in $x(t) = x_0 + v_0(\cos\theta)t$ si trova:

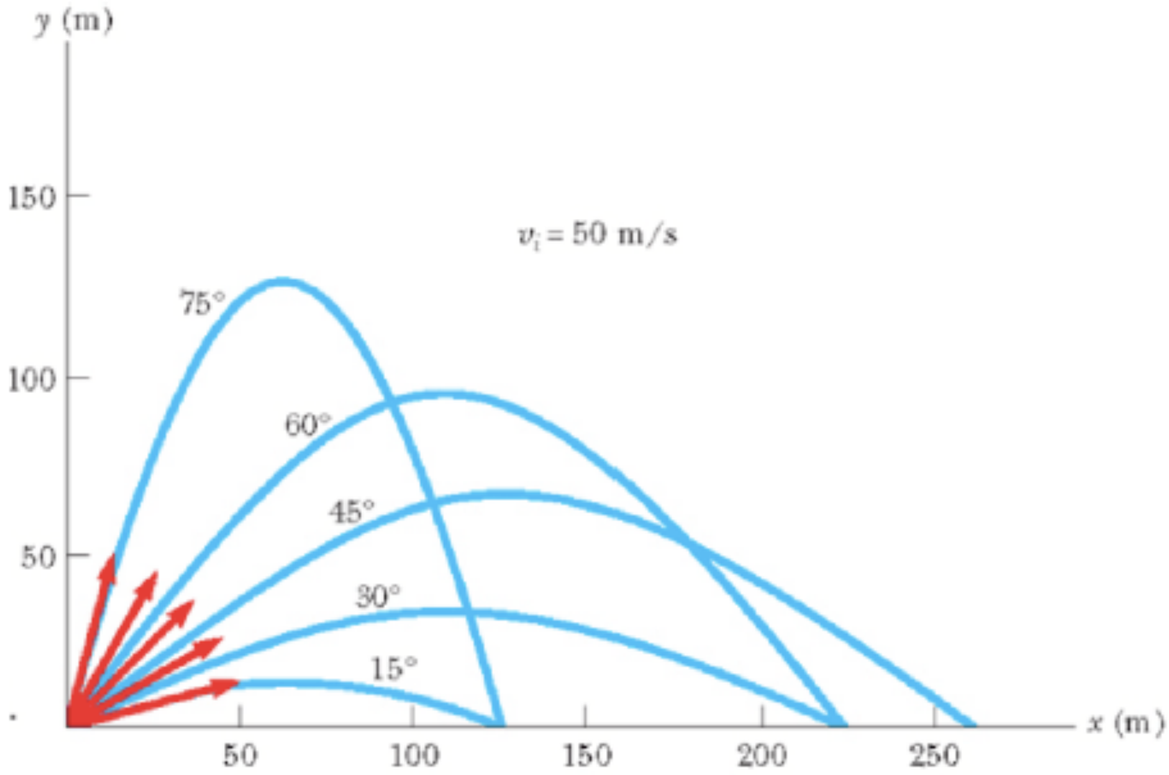
$$x - x_0 = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta) = R$$

Gittata II

La gittata R:

$$\boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)}$$

è massima se $\theta = 45°$.



L'altezza massima h si raggiunge quando $v_y = v_0 \sin\theta - gt = 0$, ovvero per $t = \frac{g}{v_0 \sin\theta}$, da cui $h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$.

Esercizio

In un cantiere una chiave inglese viene lasciata cadere da ferma da una certa altezza h e arriva al suolo con velocità $v = 24$ m/s.

1. Quanto tempo ha impiegato a cadere?

2. Da che altezza è caduta?

(si trascuri l'effetto dell'attrito con l'aria)

1) $v = gt$, *da cui* $t = v/g = 2.45$ *s*
2) $h = gt^2/2 = v^2/(2g) = 29.4$ *m.*
Notare che quest'ultima relazione è uguale all'espressione trovata in precedenza: $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ *con* $v_0 = 0$, $x_0 = 0$, $x = h$, $a = g$

Esercizio

Un arciere lancia una freccia in aria con un'inclinazione di 60 gradi, ad una distanza di 36 metri da un bersaglio posto a 2 metri dal suolo. La freccia viene scoccata da un'altezza di 1.5 metri dal terreno e con una velocità iniziale, V_0 di 20 m/s . Verificare se la freccia riesce a colpire il bersaglio.

Soluzione: Incognite: t_{volo} (tempo necessario affinché la freccia copra la distanza di 36 metri);
$y(t_{volo})$ (altezza della freccia dopo i 36 metri di volo);

Per determinare la velocità iniziale della freccia: $V_{0x}= V_0*\cos(\theta)$ *Quindi* $V_{0x}= 10\ m/s$

Per il calcolo del tempo di volo t_{volo}: $t_{volo}=x/V_{0x}=36m/10m/s=3.6\ s$

Per determinare V_{0y}: $V_{0y} = V_0 \cdot \mathrm{sen}(\theta)= 17\ m/s$

Per determinare $y(t_{volo})$: $y(t_{volo}) = (V_{0y}*t_{volo}) + (1/2g*t_{volo}^2)= (17\ m/s *3.6\ s) +(- 4.9\ m/s^2 * 13\ s^2) = -2.3\ m$

Dal risultato negativo si deduce che la freccia cade in anticipo e quindi il bersaglio non viene colpito. Affinché il bersaglio venga colpito y(t) avrebbe dovuto essere uguale a 0.5 m.

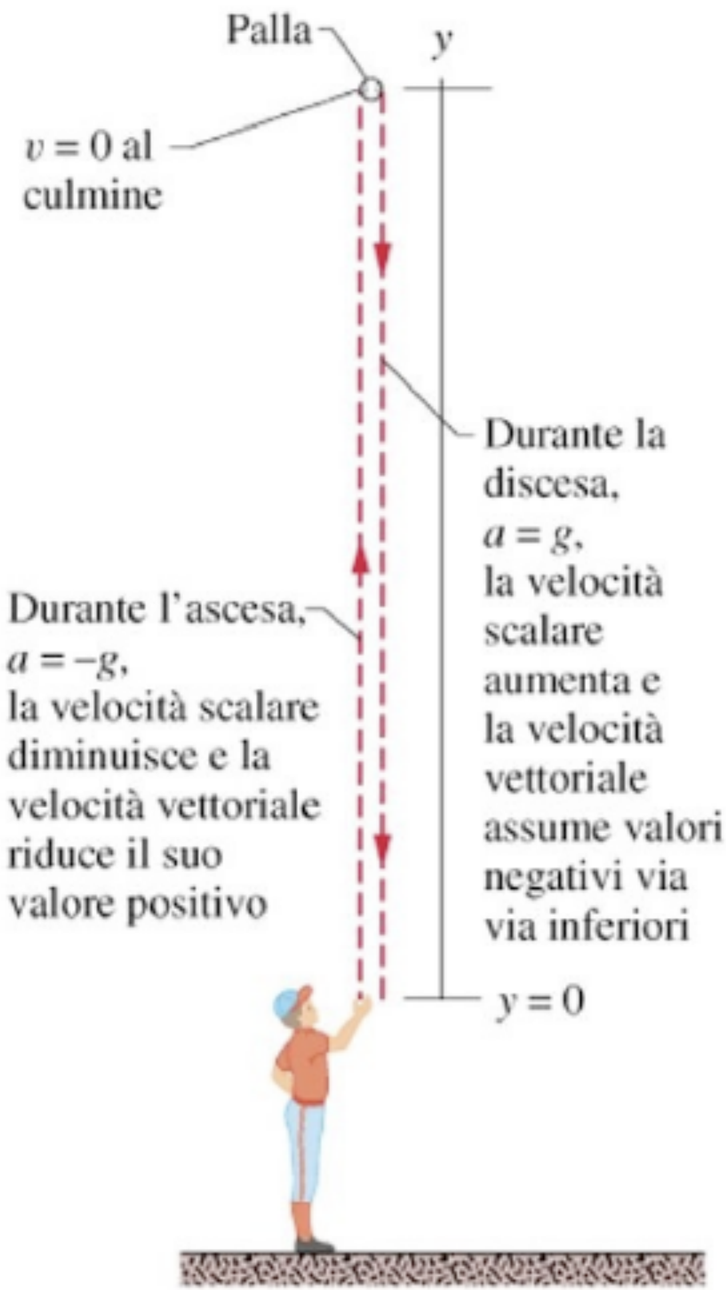
Esercizio

Una palla viene lanciata lungo la verticale ascendente con velocità iniziale $v_0 = 20$ m/s.

a) Per quanto tempo rimane in aria?

b) Qual è il valore della massima quota raggiunta?

c) In quale istante si trova a 15 m sopra il suolo?



Soluzioni:

a) $y(t) = v_0 t - gt^2/2$; cerchiamo il tempo t_1 tale per cui $y(t_1) = 0$. Otteniamo: $v_0 t_1 - g t_1^2/2 = 0$, ovvero $t_1 = 0$ (soluzione banale) e $t_1 = 2v_0/g = 4.08$ s.

b) La quota massima è raggiunta quando $v(t) = v_0 - gt = 0$, ovvero dopo $t_2 = v_0/g = 2.04$ s. Notate che $t_1 = 2t_2$: la salita dura lo stesso tempo della discesa. La quota raggiunta è quindi $y(t_2) = v_0 t_2 - g t_2^2/2 = v_0^2/2g = 20.4$ m.

c) Dobbiamo cercare il tempo t_3 tale per cui $y(t_3) = y_1$ con $y_1 = 15$ m, ovvero $v_0 t_3 - g t_3^2/2 = y_1$. Questa è un'equazione di secondo grado in t che ha come soluzioni $t_3 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gy_1}}{g}$. Le due soluzioni sono $t_3 = 0.99$ s (in salita) e $t_3 = 3.09$ s (in discesa). Notare che se $y_1 > v_0^2/2g$ non ci sono soluzioni: il termine sotto radice diventa negativo. In effetti la pallina non sale mai oltre tale livello.