

FISICA

II anno liceo scientifico

Indice

1	Termodinamica	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Alcune evidenze sperimentali	2
1.3	Tre considerazioni empiriche	3
1.4	Il modello del gas ideale	5
1.5	Sistema, osservabile, stato	6
1.6	Primo principio della termodinamica	9
1.7	Lavoro ed alcune trasformazioni termodinamiche	12
1.7.1	Espressione del lavoro infinitesimale	12
1.7.2	Alcune trasformazioni particolari	13
1.8	Coefficienti termodinamici	16
1.8.1	Coefficiente di compressibilità isoterma	16
1.8.2	Coefficiente di dilatazione termica isobaro	16
1.8.3	Calore specifico	17
1.9	Equilibri termodinamici	18
1.9.1	Equilibrio termico	19
1.9.2	Equilibrio termico e meccanico	20
1.9.3	Equilibrio termico e chimico	21
1.10	Secondo principio della termodinamica	22
1.11	Tipi di processi (o trasformazioni)	26
1.12	Cicli termodinamici e macchine termiche	27
1.12.1	Macchine termiche e rendimento	27
1.12.2	Alcuni cicli	29
1.13	Un modello del gas reale	31
1.14	Transizioni di fase	34
1.14.1	Generalità	34
1.14.2	Equilibrio tra fasi: la regola delle fasi	35
1.14.3	Calore latente di trasformazione	36
1.14.4	Transizioni di fase s, ℓ, g e modello di van der Waals	37
2	Verso la fisica statistica	43
2.1	Introduzione	43
2.2	Dal micro al macro: il procedimento di media	43
2.3	Interpretazione microscopica di p, T ed U	46
2.3.1	Teoria cinetica	46

2.3.2	Equipartizione dell'energia	48
2.4	L'entropia di Boltzmann	49
2.4.1	La termodinamica introduce la freccia del tempo	49
2.4.2	Da impossibile ad improbabile: l'introduzione delle probabilità . . .	50
3	Meccanica	57
3.1	Introduzione	57
3.2	Sistema, osservabile, stato	58
3.3	La quantità di moto	60
3.4	La Prima legge di Newton	63
3.5	La Terza legge di Newton	66
3.6	La Seconda legge di Newton	68
3.7	Alcuni esempi di forze	70
3.7.1	Forza peso	70
3.7.2	Forza elastica	70
3.7.3	Forza di attrito viscoso	71
3.7.4	Forza di attrito radente	73
3.8	Potenza e lavoro	75
3.9	Energia cinetica	78
3.10	Energia meccanica	80
3.11	Urti	84
4	Elettrostatica	85
4.1	Introduzione	85
4.2	La carica elettrica	85
4.3	La forza elettrostatica: legge di Coulomb	87
4.4	Il campo elettrico	89
4.4.1	Definizione	89
4.4.2	Rappresentazione del campo: linee di forza	90
4.4.3	Dalla forza a distanza al campo	92
4.4.4	Alcuni esempi di campo elettrico	93
4.5	Energia e potenziale elettrico	94
4.6	Corrente elettrica	95

Capitolo 1

Termodinamica

1.1 Introduzione

La **termodinamica** è lo studio di sistemi macroscopici composti da un *grande numero* di sottosistemi (chiamati anche microsistemi) *identici*. Ne sono esempi i gas, i liquidi, i solidi, le galassie, l'Universo; tutti questi sistemi macroscopici sono tipicamente costituiti da $10^{12} - 10^{25}$ sottosistemi.

Poniamo ad esempio di voler studiare un gas contenuto in un recipiente: il sistema cui ci interessiamo è il gas, ovvero un sistema macroscopico, il quale è però composto da un grande numero di particelle *identiche* (nell'ordine di 10^{23} particelle), che costituiscono appunto i sottosistemi (o microsistemi).

Un **sistema termodinamico** non è nient'altro che un sistema composto da tanti sottosistemi identici; ed in generale ogni sistema è separato dall'esterno con delle *pareti*, attraverso le quali possono avvenire degli *scambi* (per esempio scambio di energia, di materia).

La termodinamica non consiste nell'analisi dettagliata del comportamento di ciascun sottosistema, bensì nello studio delle proprietà macroscopiche del sistema. Tali proprietà macroscopiche costituiscono delle evidenze sperimentali e sono identificate da grandezze osservabili. La termodinamica mette in evidenza le relazioni tra tali proprietà macroscopiche osservabili senza cercarne l'origine microscopica, che sovente è complessa.

La termodinamica non è neppure una teoria del calore (concetto che sarà discusso più avanti), ma una teoria fisica generale a livello macroscopico. In particolare è un'estensione della meccanica e dell'elettromagnetismo in cui interviene una nuova azione dall'esterno sul sistema sottoforma di calore. In questo corso mostreremo come è possibile estendere la meccanica per ottenere la termodinamica.

È importante osservare che, a differenza della meccanica in cui generalmente si studia l'evoluzione di un fenomeno nel tempo, in termodinamica si analizza una classe particolare di situazioni all'equilibrio, in particolare gli *stati di equilibrio* ed *alcune* evoluzioni tra questi stati (processi o trasformazioni reversibili e quasi-statiche) senza però interessarsi all'evoluzione precisa come in meccanica: sarebbe più opportuno parlare quindi di **termostatica**.

1.2 Alcune evidenze sperimentali

La termodinamica è una *teoria basata sull'esperienza*, ossia una teoria di tipo empirico-induttivo. È pertanto logico iniziare il corso discutendo alcune evidenze sperimentali. Esse mettono in luce l'esigenza di estendere lo schema concettuale entro il quale abbiamo costruito la meccanica¹. In particolare discutiamo alcune situazioni empiriche in cui è necessario introdurre nuovi concetti per riuscire a descrivere il fenomeno osservato.

Esperienza 1. Consideriamo un solido lanciato su un piano orizzontale e sottomesso ad una forza di attrito ($\Sigma = \text{solido}$). Se il solido è lanciato con una velocità non nulla, la forza di attrito sviluppa una potenza negativa e l'*energia meccanica del sistema diminuisce* (ricordiamo che la forza d'attrito non è conservativa), ma l'osservazione ci mostra che, sebbene di poco, il solido e ciò che esercita l'attrito diventano più "caldi". Dove va a finire l'energia meccanica?

Esperienza 2. Consideriamo un solido che viene riscaldato, è naturale attendersi che con questo riscaldamento trasferiamo energia al sistema, ma esso non cambia la sua velocità (e quindi non acquisisce energia cinetica) e non cambia neppure la sua altezza rispetto ad uno zero prescelto (non acquisisce energia potenziale gravitazionale).

Esperienza 3. Consideriamo un recipiente pieno di acqua ad una temperatura di 20 °C ($\Sigma = \text{acqua}$). Se scaldiamo l'acqua ci aspettiamo che l'energia dell'acqua aumenti. Intuitivamente possiamo pensare che il moto delle singole molecole è più frenetico con l'aumentare della temperatura e che di conseguenza l'energia cinetica delle molecole aumenta; ciò nonostante l'acqua in complesso non si muove, non vi è variazione di energia cinetica del sistema. In linea con l'esperienza 1 diremo che ciò che viene modificato scaldando l'acqua è una forma di energia non meccanica.

In meccanica abbiamo visto che possiamo modificare l'energia di un sistema con un'azione dall'esterno tramite una forza, qui però di forze non ve ne sono affatto, eppure l'energia del sistema è modificata. Da dove spunta quest'energia, ossia come è possibile che la fiamma che scalda l'acqua modifichi l'energia senza fare una forza?

Queste tre esperienze mostrano che:

- Esperienza 1 e 2: $\implies$ *Necessità* di introdurre un nuovo tipo di energia per mantenere il principio di conservazione dell'energia.
- Esperienza 2 e 3: $\implies$ *Necessità* di introdurre un nuovo tipo di azione dall'esterno sul sistema, oltre le forze, per trasferire energia, così da poter spiegare nuovi fenomeni.

Uno degli scopi della termodinamica è quindi quello di introdurre nuove grandezze fisiche associate alle due necessità discusse in questa sezione:

¹Vedi corso di prima liceo.

- la nuova forma di energia è chiamata **energia interna** e notata U ,
- la nuova modalità per trasferire energia ad un sistema, che va ad aggiungersi al lavoro (modalità meccanica tramite l'azione di una forza), è chiamata **calore** e notata Q .

Queste due nuove grandezze stanno alla base di quello che è noto come primo principio della termodinamica, che affiancato al secondo principio forma la base teorica della teoria. Segnaliamo già da il contenuto profondo del secondo principio è la possibilità dello studio della reversibilità dei processi naturali, che viene collegato ad un'altra importantissima nuova grandezza fisica chiamata entropia che vedremo in seguito.

1.3 Tre considerazioni empiriche

In questa sezione introduciamo alcuni parametri caratteristici dei materiali (solidi, liquidi e gas) che permettono di introdurre in modo quantitativo il calore e di definire in modo operativo una grandezza termodinamica molto importante, ossia la temperatura. Riprenderemo poi il contenuto di questa sezione in modo più formale in seguito.

Coefficiente di compressibilità isoterma

Un'altra modalità per modificare il volume di un sistema è facendo una compressione (aumento di pressione Δp) che provoca quindi una diminuzione del volume ($\Delta V < 0$), in questo caso l'esperienza mostra che, *a temperatura costante*,

$$\Delta V \propto -\Delta p \quad \Delta V \propto V \quad \implies \quad \Delta V \propto -V \Delta p$$

e introducendo un coefficiente di proporzionalità possiamo scrivere

$$\Delta V = -\kappa_T V \Delta p \tag{1.1}$$

κ_T è chiamato **coefficiente di compressibilità isoterma** e *dipende dalla pressione*. Notiamo che il segno $-$ è stato inserito per avere $\kappa_T > 0$.

Coefficiente di dilatazione termica isobaro e temperatura

Se la temperatura di un sistema aumenta, di solito esso si dilata, la dilatazione termica è spesso utilizzata per misurare variazioni di **temperatura**, è il principio del termometro a mercurio che permette di definire in modo operativo la temperatura in base alla dilatazione della colonna di mercurio.

Sperimentalmente si trova che, *a pressione costante*, la variazione di volume è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura ΔT e al volume iniziale V :

$$\Delta V \propto \Delta T \quad \Delta V \propto V \quad \implies \quad \Delta V \propto V \Delta T$$

e introducendo un coefficiente di proporzionalità possiamo scrivere

$$\Delta V = \beta_p V \Delta T \quad (1.2)$$

β_p è chiamato **coefficiente di dilatazione (volumica) isobara** e *dipende dalla temperatura*.

È anche possibile considerare delle dilatazioni lineari, in tal caso la variazione di lunghezza è simile a quanto detto sopra e vale

$$\Delta \ell = \alpha_p \ell \Delta T \quad (1.3)$$

dove α_p è il *coefficiente di dilatazione (lineare) isobara* ed è legato a β_p dalla relazione $\beta_p = 3\alpha_p$.

Calore e calore specifico

Il trasferimento di energia nella modalità calore tra l'esterno e il sistema può avere come effetto l'aumento della temperatura del sistema², è per esempio il caso dell'esperienza 2 descritta nella sezione precedente.

L'esperienza mostra che l'aumento di temperatura è direttamente proporzionale all'energia fornita con la modalità calore e indirettamente proporzionale alla massa del sistema:

$$\Delta T \propto Q \quad \Delta T \propto \frac{1}{m} \quad \implies \quad \Delta T \propto Q \frac{1}{m} \implies Q \propto m \Delta T$$

e introducendo un coefficiente di proporzionalità possiamo scrivere

$$Q_x = m c_x \Delta T \quad (1.4)$$

c_x è chiamato **calore specifico** e rappresenta il l'energia da fornire nella modalità calore per aumentare la temperatura di 1 K di una massa di 1 kg, esso dipende dal materiale preso in considerazione. L'indice x sta a indicare il processo con cui è stata trasferita l'energia al sistema (nella modalità calore), infatti un per un processo a pressione costante o a volume costante il calore del calore specifico è differente.

Osserviamo che per i liquidi ed i solidi c_p e c_V sono simili, mentre per i gas invece il fatto di avere un processo a pressione costante (quindi c_p) o a volume costante (quindi c_V) porta a delle differenze importanti tra c_p e c_V .

²Escluso il caso in cui si hanno delle transizioni di fase, vedi 1.14 e il caso in cui il sistema è infinitamente grande (bagno termico).

1.4 Il modello del gas ideale

Con lo scopo di avere un modello semplice, ma concreto, presentiamo ora quello che è noto come modello del gas ideale, esso come dice il nome è un possibile modello per descrivere i gas entro certi limiti.

Un gas composto da corpuscoli (per esempio atomi, molecole, galassie, ...) che ***non interagiscono*** tra loro e ***il cui volume proprio è trascurabile rispetto al volume totale***, possono essere descritti con un modello molto semplice chiamato appunto ***modello del gas ideale***.

Questo modello si applica se la temperatura (unità di misura il Kelvin K^3) è sufficientemente alta, in modo tale da poter trascurare l'energia potenziale d'interazione tra le particelle. Infatti, come vedremo nella sezione 2.3.1 ad alte temperature corrispondono grandi energie cinetiche, e quindi se la temperatura è sufficientemente grande l'energia cinetica diventa molto più grande dell'energia potenziale d'interazione. Inoltre la densità del gas non deve essere troppo elevata, in modo da poter trascurare il volume proprio delle particelle.

Il modello del gas ideale, che si prefigge di descrivere l'equilibrio di un gas con le ipotesi poste sopra, soddisfa le seguenti equazioni che sono determinate *empiricamente*:

$$pV = Nk_B T \quad (1.5)$$

$$U = cNk_B T \quad (1.6)$$

dove $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K ed è chiamata ***costante di Boltzmann*** e c una costante che dipende dal tipo di gas, vedremo più avanti il significato macroscopico (formula (1.18)) e microscopico (sezione 2.3.2) di questa costante⁴.

Esempio. La costante c vale $c = 3/2$ per un gas monoatomico (He, Ar, Ne). Per un gas formato da molecole diatomiche (O_2 , NO) la costante vale $c \simeq 5/2$ a basse temperature e $c \simeq 7/2$ a temperature più elevate, dove la frontiera è a $T = 1000$ K.

Osservazione. È possibile esprimere lo stato utilizzando il numero di moli n (unità di misura la mole mol) al posto del numero di particelle N , in tal caso bisogna procedere alle seguenti sostituzioni:

$$N \rightarrow n = \frac{N}{N_A} \quad \text{e} \quad k_B \rightarrow R = N_A k_B$$

³La trasformazione Kelvin (K) $\longleftrightarrow$ Celsius ($^{\circ}\text{C}$) è la seguente

$$T\text{ K} = T\text{ }^{\circ}\text{C} + 273.$$

⁴Che non va confusa con il calore specifico (quest'ultimo porta sempre un indice: c_V o c_p)!

dove $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ è il numero di Avogadro e $R = 8,314 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$ è chiamata costante dei gas ideali.

1.5 Sistema, osservabile, stato

In questa sezione cerchiamo di formalizzare un po' alcuni concetti fondamentali di ogni teoria fisica, che sia la meccanica, la termodinamica,

Il primo concetto da introdurre quando si vuole studiare un fenomeno fisico è quello di sistema. Il **sistema** (notato Σ) è semplicemente ciò che si vuole studiare. Esso può essere isolato dal resto dell'Universo oppure interagire con l'esterno.

Abbiamo le seguenti definizioni.

- Due sistemi, notati Σ_1 e Σ_2 , sono detti **in interazione** se l'evoluzione temporale di Σ_1 dipende dall'evoluzione di Σ_2 . Nel caso contrario sono detti **senza interazione**. In altre parole due sistemi sono senza interazione se né Σ_1 influenza Σ_2 , né Σ_2 influenza Σ_1 .
- Un sistema senza interazione con l'esterno è detto **isolato**. Quindi, in questo caso, le cause dell'evoluzione del sistema sono all'interno del sistema stesso.
- Un sistema è detto **chiuso** se non scambia materia con l'esterno, nel caso contrario è detto **aperto**.

Il secondo concetto da introdurre è quello di osservabile. Per un osservatore (noi che siamo interessati al sistema) il sistema fisico studiato è caratterizzato da un insieme di osservabili, che l'osservatore ha deciso di prendere in considerazione. Per definizione, una **osservabile** è una grandezza fisica che è possibile definire e misurare⁵ grazie ad un apparecchio di misura e un'unità di misura. Abbiamo quindi

$$\text{Osservabile} \rightleftharpoons \text{Apparecchio di misura}$$

Abbiamo le seguenti definizioni.

- Una grandezza è detta **conservata** se è costante nel corso dell'evoluzione per un sistema *isolato*.
- Una grandezza A è detta **estensiva** se il valore di questa grandezza per un sistema Σ formato da due sotto sistemi Σ_1 e Σ_2 (cioè: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$) è uguale alla somma dei valori per ogni sotto sistema, cioè: $A = A_1 + A_2$.
- Una grandezza B è detta **intensiva** se il valore di questa grandezza non dipende dalla taglia del sistema, nel senso che, se per esempio si "raddoppia" il sistema con tutte le sue grandezze estensive il valore della grandezza B non cambia.

⁵Con una misura diretta o indiretta.

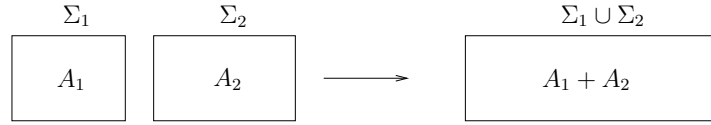


Figura 1.1: Illustrazione della proprietà di estensività.

- Una grandezza S è detta **scalare** se è interamente definita da un numero reale s e un'unità di misura. Il valore numerico non dipende dal sistema di coordinate scelto.
- Una grandezza $\vec{V}$ è detta **vettoriale** se è caratterizzata da:
 - un numero positivo con un'unità di misura (anche chiamata norma del vettore) e notato V (oppure $\|\vec{V}\|$),
 - una direzione,
 - un verso.

Le grandezze vettoriali si rappresentano nello spazio fisico con delle frecce chiamate **vettori**⁶, e questa rappresentazione *non* dipende dal sistema di coordinate scelto.

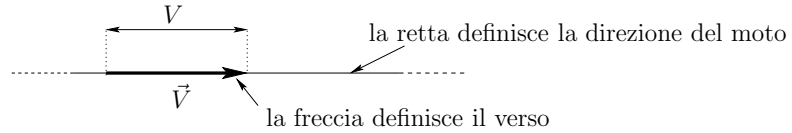


Figura 1.2: Rappresentazione di una grandezza vettoriale $\vec{V}$. V rappresenta la lunghezza del vettore.

Esempio 1

- Sistema: una particella che si muove nello spazio a tre dimensioni su cui agisce la forza peso.
- Osservabili: posizione (grandezza vettoriale), velocità (grandezza vettoriale), energia cinetica (grandezza scalare).

Esempio 2

- Sistema: un gas *ideale*.
- Osservabili: pressione (grandezza scalare, intensiva), temperatura (grandezza scalare, intensiva), energia (grandezza scalare, estensiva).

Il terzo concetto da introdurre è quello di stato. Per definizione, lo **stato** caratterizza l'informazione che l'osservatore possiede sul sistema studiato *ad un dato istante*⁷

Stato $\rightleftharpoons$ Informazione

⁶Attenzione: una freccia è un caso *molto particolare* di vettore.

⁷Si parla anche di **stato istantaneo**.

Precisiamo che lo stato rappresenta l'informazione inerente *unicamente* il sistema, e non un'eventuale interazione esterno-sistema e che in termodinamica si studia una classe particolare di stati, chiamati **stati di equilibrio**, ossia stati che non cambiano nel tempo e in cui non avviene nessun tipo di flusso. Inoltre lo stato di equilibrio termodinamico è descritto da *poche variabili*.

Nel quadro studiato in questo corso supponiamo che l'osservatore possiede *sempre* l'*informazione massimale* sul sistema, ciò vuol dire che conosciuta questa informazione l'osservatore può determinare *univocamente* il valore di tutte le osservabili.

Esempio 2 (continuazione)

In termodinamica possiamo definire lo stato con le tre variabili (U, V, N) in tal caso l'osservabile temperatura è semplicemente definito dalla relazione $T = \frac{U}{cNk_B}$ e l'osservabile pressione da $p = \frac{U}{cV}$. Lo stato è uno stato di equilibrio nel senso che (U, V, N) sono costanti e che per esempio non vi è un flusso di energia che entra perfettamente compensato da un flusso di energia che esce.

Possiamo riassumere questa tripla nel modo seguente. L'osservatore per studiare un qualsiasi fenomeno fisico deve:

- dapprima scegliere il **sistema** che desidera studiare,
- poi decidere cosa studiare relativamente al sistema, ossia scegliere delle **osservabili**,
- ed infine deve possedere delle informazioni sul sistema senza delle quali lo studio è impossibile, si tratta quindi di conoscere *ad ogni istante* lo **stato** (e le proprietà del sistema).

Abbiamo visto che il calore da fornire per ottenere una differenza di temperatura *dipende* dal tipo di processo (a volume costante o a pressione costante), sappiamo pure che la differenza di energia meccanica dipende unicamente dallo stato iniziale e finale, questa constatazione è di fondamentale importanza perché permette di differenziare le *grandezze di stato* (osservabili) dalle *grandezze di processo*:

- per le grandezze di stato la differenza tra due stati di equilibrio dipende *unicamente* dagli stati iniziale e finale,
- per le grandezze di processo è generalmente necessario conoscere il dettaglio del processo. Ecco alcuni esempi di “dettaglio del processo”: il processo avviene senza scambio di energia nella modalità calore, oppure senza scambio di energia nella modalità lavoro, o ancora a temperatura costante, per la meccanica basti pensare al fatto che agisce un certo tipo di attrito (con l'aria o con la superficie).

Elenchiamo qui di seguito le grandezze di stato e di processo tipiche della termodinamica⁸

⁸Non tutte sono già state definite.

Grandezze di stato	Grandezze di processo
S, U, V, N, T, p, μ	Q, W, W_{chim}

Classificazione dei processi.

Riportiamo qui di seguito alcuni tipici processi che si incontrano in termodinamica.

- **Processo isoergonico:** processo a energia costante.
- **Processo isoentropico:** processo a entropia costante.
- **Processo adiabatico:** processo senza scambi con la modalità calore e di materia.
- **Processo isocoro:** processo a volume costante.
- **Processo isotermico:** processo a temperatura costante.
- **Processo isobaro:** processo a pressione costante.

Infine introduciamo il concetto di processo infinitesimale e processo quasi-statico.

Un **processo infinitesimale** è semplicemente un processo tra due stati di equilibrio infinitamente vicini, esso è chiaramente un'idealizzazione ma è particolarmente utile per costruire la teoria. Inoltre molti processi possono essere calcolati come la successione di processi infinitesimali, è il caso dei processi detti **quasi-statici**. Un processo è quasi-statico se ad ogni istante lo stato del sistema è infinitamente vicino ad uno stato di equilibrio.

- Differenza tra due stati di equilibrio “lontani”

	Notazione	Esempi
osservabile (grandezze di stato) A grandezze di processo B	$\Delta A = A_{fin} - A_{in}$ B	$\Delta U = U_f - U_i, \Delta T = T_f - T_i$ Q, W

- Differenza tra due stati di equilibrio “vicinissimi” (caso di una trasformazione infinitesimale)

	Notazione	Esempi
osservabile (grandezze di stato) A grandezze di processo B	dA δB	dV, dT $\delta Q, \delta W$

1.6 Primo principio della termodinamica

I tre principi della termodinamica sono leggi della fisica che sono state verificate in un grandissimo numero di sistemi a tal punto da erigerli a principi. Non sono quindi delle leggi che possono essere dimostrate in tutta generalità, bensì unicamente per alcuni casi particolari. In questo corso (ultimo capitolo) deriviamo i primi due principi nel caso di un sistema meccanico formulati in una versione che involve le grandezze istantanee. Una formulazione istantanea è utile se cerchiamo l'evoluzione temporale, ma se ci interessiamo

unicamente agli stati di equilibrio iniziali e finali è sufficiente considerare una versione “integrata”. Come detto noi ci occuperemo principalmente di processi tra due stati di equilibrio e quindi formuliamo in tal modo i principi nella *versione termostatica*.

Primo principio della termostatica.

Per ogni sistema termodinamico Σ esiste un’osservabile, l’**energia** E^Σ , funzione di stato, scalare, *estensiva*, *conservata* che soddisfa il seguente enunciato:

La variazione di energia tra lo stato di equilibrio iniziale e lo stato di equilibrio finale vale

$$\underbrace{\Delta E^\Sigma = E_f^\Sigma - E_i^\Sigma}_{\text{sistema}} = \underbrace{W^{est} + Q^{est} + W_{chim}^{est}}_{\text{esterno-sistema}}. \quad (1.7)$$

Il termine W^{est} rappresenta lo scambio di energia sottoforma di **lavoro meccanico** (ed elettromagnetico), il termine Q^{est} rappresenta lo scambio di energia sottoforma di **calore**, mentre W_{chim}^{est} rappresenta lo scambio di energia sottoforma di **lavoro chimico** dovuto al trasferimento di materia (sistema aperto).

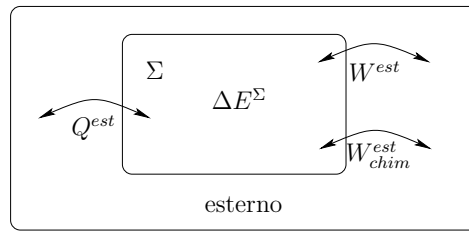


Figura 1.3: Sistema Σ che in una trasformazione tra due stati di equilibrio scambia con l’esterno energia nelle modalità calore (Q^{est}), lavoro (W^{est}) e lavoro chimico (W_{chim}^{est}); si ha come risultato una modifica dell’energia del sistema (ΔE^Σ).

Commenti.

Come possiamo notare il lavoro ed il calore sono due grandezze che riguardano il *processo* che ha portato il sistema dallo stato di equilibrio iniziale allo stato di equilibrio finale e, a differenza dell’energia, non possiamo conoscere il loro valore durante questo processo se conosciamo unicamente lo stato iniziale e lo stato finale. Diremo che *il lavoro e il calore sono grandezze di processo*, a differenza dell’energia (e l’entropia come vedremo qui sotto) che sono *grandezze di stato*. In altre parole per conoscere il valore del lavoro e del calore dovremmo conoscere il dettaglio del processo che ha indotto il sistema a passare dallo stato di equilibrio iniziale a quello finale.

Inoltre, il lavoro ed il calore sono delle modalità di *trasferimento di energia dall’esterno al sistema*. Quando tale energia è *nel* sistema non è più possibile riconoscere tramite quale modalità essa sia stata trasferita al sistema, se con la modalità calore o con la modalità lavoro. *Lavoro e calore non sono quindi energia*. Per mettere in luce questo aspetto ecco un’analogia in cui sono presi in considerazione unicamente il lavoro W^{est} e il calore Q^{est} .

“Un signore possiede un piccolo stagno, che riceve acqua da un ruscello e la scarica

in un altro; lo stagno riceve inoltre acqua quando piove, e ne perde per evaporazione: quest'ultima potrebbe essere definita come "pioggia negativa". Nella nostra analogia lo stagno equivale al sistema, l'acqua contenuta è l'energia, l'acqua scambiata coi ruscelli è il lavoro, e l'acqua scambiata come "pioggia" rappresenta il calore. Anzitutto si noti come in nessun momento sia possibile stabilire, esaminando lo stagno, quanta acqua provenga dal ruscello e quanta dalla pioggia; inoltre il termine "pioggia" si riferisce solo a un modo di trasferire dell'acqua. Supponiamo che il proprietario dello stagno voglia misurare la quantità d'acqua che vi è contenuta. Egli può procurarsi dei misuratori di portata, applicarli ai ruscelli, e misurare in tal modo la quantità d'acqua che entra e che esce dallo stagno; ma non può procurarsi un misuratore per la pioggia. Egli può invece stendere una tela cerata sullo stagno, coprendolo così con un involucro impermeabile alla pioggia (ossia, con una parete adiabatica). Supponiamo quindi che egli pianti un palo nello stagno, che copra quest'ultimo con una tela impermeabile, e che inserisca i contatori nei ruscelli. Sbarrando ora l'uno o l'altro dei due ruscelli egli può regolare il livello dell'acqua dello stagno a suo piacere e, leggendo sui contatori le misure di portata e sul palo le misure di livello, egli è in grado di eseguire una taratura, che mette in corrispondenza la quantità d'acqua totale contenuta nello stagno con il livello da esso raggiunto. In tal modo, effettuando delle trasformazioni sul sistema coperto da un involucro adiabatico, egli è in grado di misurare la quantità d'acqua totale (E^Σ) contenuta nel suo stagno. Il nostro cortese signore toglie ora la tela cerata per permettere alla "pioggia" di entrare nello stagno e di uscirne, così come già accade per l'acqua dei due ruscelli. Se poi desidera sapere quanta pioggia è entrata nel corso di una certa giornata, egli deve operare molto semplicemente: basta infatti che legga sul palo verticale la differenza di quantità d'acqua contenuta, e che da essa sottragga l'acqua complessivamente entrata a causa dei ruscelli. Tale differenza dà la misura della quantità di pioggia caduta. È quindi evidente la stretta analogia esistente tra queste operazioni e quelle corrispondenti eseguite nella termodinamica".

Un'osservazione sulla convenzione dei segni da attribuire al lavoro ed al calore è importante (perché può essere diversa da quella utilizzata in altri testi, per esempio nel corso di chimica):

- $W > 0$ e $Q > 0$ se il sistema *riceve* energia,
- $W < 0$ e $Q < 0$ se il sistema *cede* energia.

Infine notiamo che non è sempre evidente scomporre il trasferimento di energia in modo da attribuirlo univocamente alle tre modalità (lavoro meccanico, calore e lavoro chimico) citate sopra.

Da notare che E^Σ comprende tutte le forme di energia associate al sistema, e in generale si ha

$$E^\Sigma = E^{mec} + U$$

cionostante nei problemi tipici della termodinamica l'unica contribuzione all'energia è l'energia interna, poiché il sistema è macroscopicamente a riposo (e quindi $E^{cin} = 0$) e

allo zero del sistema di coordinate (e quindi $E^{pot} = 0$).

Diamo ora la versione del primo principio per una **trasformazione quasi-statica** tra due stati di equilibrio vicinissimi, ossia una trasformazione infinitesimale, (consideriamo che l'unico contributo all'energia del sistema è dato dall'energia interna U).

Primo principio (versione infinitesimale).

$$dU = \delta W^{est} + \delta Q^{est} + \delta W_{chim}^{est} \quad (1.8)$$

dove dU è una piccolissima variazione di energia, δW^{est} , δQ^{est} e δW_{chim}^{est} il lavoro, il calore ed il lavoro chimico scambiati nella piccolissima trasformazione.

1.7 Lavoro ed alcune trasformazioni termodinamiche

1.7.1 Espressione del lavoro infinitesimale

Consideriamo unicamente una **compressione uniforme quasi-statica** (o *reversibile*) di un gas in un pistone cilindrico di sezione A che provoca una diminuzione del volume di ΔV , vedi figura 1.4.

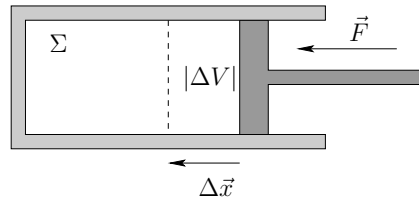


Figura 1.4: La forza esterna $\vec{F}$ comprime il gas (= sistema) provocando una diminuzione di volume pari a ΔV .

Il lavoro svolto dalla forza esterna $\vec{F}$, supposta costante, è dato da

$$W^{est} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

dove $\Delta \vec{x}$ è lo spostamento del pistone che ha stessa direzione e stesso verso della forza $\vec{F}$, quindi

$$W^{est} = F \Delta x = \frac{F}{A} A \Delta x > 0$$

ora $A \Delta x$ è uguale a $|\Delta V|$ e siccome il volume diminuisce avremo $\Delta V < 0$, utilizzando $p = \frac{F}{A}$, possiamo quindi scrivere

$$W^{est} = -p \Delta V > 0$$

Per una compressione infinitesimale (ossia piccolissima) scriveremo⁹

$$\delta W^{est} = -p dV. \quad (1.9)$$

⁹Questo risultato, valido per una trasformazione infinitesimale, vale anche se la forza (e quindi la pressione) non è costante.

È importante notare che in questa espressione p rappresenta *sia* la pressione esterna (dovuta alla forza) *sia* la pressione interna, ossia la pressione del gas, ciò deriva dal fatto che abbiamo considerato una trasformazione quasi-statica, ossia una trasformazione in cui il sistema è sempre in uno stato vicinissimo ad uno stato di equilibrio. La meccanica ci insegna quindi che per avere una situazione di equilibrio la pressione dovuta all'azione della forza esterna deve essere compensata dalla pressione del gas.

1.7.2 Alcune trasformazioni particolari

Un diagramma termodinamico particolarmente utile per lo studio del lavoro è il **diagramma pV** , in cui si rappresenta la pressione in funzione del volume. La rappresentazione dipende evidentemente dalla trasformazione che si desidera descrivere.

Da notare che è possibile rappresentare su un diagramma pV unicamente le trasformazioni reversibili¹⁰, ossia l'insieme delle trasformazioni per le quali le grandezze termodinamiche, in particolare la pressione, possono essere definite in ogni istante del processo, tipicamente ciò è il caso per processi molto lenti, in ogni i processi reversibili devono essere quasi-statici.

Facciamo qualche esempio, nel caso in cui il sistema è un *gas ideale*.

- **Trasformazione isoterma:** dalla legge dei gas ideali con T costante abbiamo

$$pV = \text{costante} \quad (1.10)$$

L'equazione di un'isoterma è quindi un'iperbole.

- **Trasformazione isocora:** in questo caso la pressione *non* dipende da V e sul diagramma abbiamo un segmento di retta verticale.
- **Trasformazione isobara:** in questo caso la pressione resta costante ed è quindi un segmento di retta orizzontale.

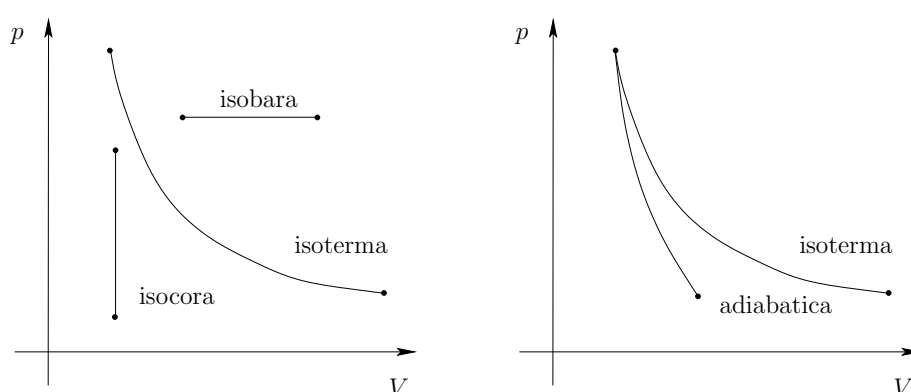


Figura 1.5: Equazione di un'isoterma, di un'isocora, di un'isobara e di un'adiabatica.

¹⁰Definiremo più avanti questo concetto di trasformazione reversibile in modo preciso ed in relazione all'entropia.

- **Trasformazione adiabatica:** si dimostra che vale l'equazione¹¹

$$pV^\gamma = \text{costante} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{c+1}{c} > 1. \quad (1.12)$$

L'interesse del diagramma pV sta nel fatto che, conoscendo $p = p(V)$ ed il fatto che il lavoro di compressione uniforme in un processo reversibile è dato da $\delta W = -pdV$, è possibile calcolare W per una trasformazione data.

Un risultato utile è il seguente. Il lavoro in una *compressione a pressione costante* da uno stato $\rho_1 = (T_1, V_1, N)$ ad uno stato $\rho_2 = (T_2, V_2, N)$ è dato dall'area sotto il grafico $p = \text{cost}$ tra V_1 e V_2 (vedi figura 1.6):

$$W = -p\Delta V = -p(V_2 - V_1) > 0. \quad (1.13)$$

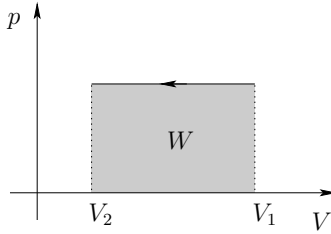


Figura 1.6: Trasformazione isobara da uno stato iniziale caratterizzato dal volume V_1 ad uno stato finale caratterizzato dal volume V_2 . Il lavoro W è dato dall'area nel diagramma pV .

Questo risultato si generalizza anche nel caso in cui p non è costante. In generale notiamo con il simbolo

$$W_{1 \rightarrow 2}$$

il lavoro per una trasformazione da uno stato iniziale ρ_1 ad uno stato finale ρ_2 seguendo una trasformazione termodinamica conosciuta (quindi reversibile e che può essere rappresentata in un diagramma termodinamico, nell'esempio qui sopra il diagramma pV).

Un risultato importante è il seguente: per una *trasformazione reversibile isoterma di un gas ideale* da uno stato $\rho_1 = (T, V_1, N)$ ad uno stato $\rho_2 = (T, V_2, N)$ abbiamo

$$W_{1 \rightarrow 2} = -Nk_B T \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

¹¹La dimostrazione procede così: dal secondo principio sappiamo che per una trasformazione adiabatica reversibile $\Delta S = 0$, grazie a (1.6) e (1.23) (con $N = N_0$) possiamo dedurre

$$0 = \Delta S = S - S_0 = Nk_B \ln \left[\left(\frac{cNk_B T}{cNk_B T_0} \right)^c \frac{V}{V_0} \right] \Rightarrow \left(\frac{T}{T_0} \right)^c \frac{V}{V_0} = 1 \Rightarrow T^c V = T_0^c V_0$$

e quindi

$$TV^{1/c} = \text{costante}. \quad (1.11)$$

Con (1.5) possiamo anche scrivere $\frac{pV}{Nk_B} V^{1/c} = \text{costante}$, da cui si ottiene il risultato cercato.

La *notazione* utilizzata per indicare il lavoro in un una trasformazione da uno stato ρ_1 ad uno stato ρ_2 è pure utilizzata per il calore, dove scriveremo

$$Q_{1 \rightarrow 2}$$

Questa scrittura è utilizzata per le grandezze di processo, mentre per le grandezze di stato (per esempio una grandezza di stato A) è implicito che una scrittura del tipo ΔA significa

$$\Delta A = A_2 - A_1 .$$

Un caso particolare delle trasformazioni termodinamiche sono quelle cicliche, ossia che partono e arrivano allo stesso stato, si parla di un ciclo chiuso, o ciclo termodinamico. Per queste trasformazioni, nel caso delle grandezze di stato si ha

$$\Delta A = 0$$

poiché con $A_2 = A_1$. Per le grandezze di processo invece in generale

$$W \neq 0 \qquad Q \neq 0$$

come è possibile verificare (nel caso del lavoro) se consideriamo i diagrammi pV nella figura 1.7. Infatti, utilizzando (1.13), abbiamo:

- Ciclo ① $\rightarrow$ ② $\rightarrow$ ③ $\rightarrow$ ④ $\rightarrow$ ① (senso antiorario)

$$\begin{aligned} W_{\odot} &= W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1} \\ &= [-p_1(V_2 - V_1)] + 0 + [-p_2(V_1 - V_2)] + 0 = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) > 0 \end{aligned}$$

- Ciclo ① $\rightarrow$ ④ $\rightarrow$ ③ $\rightarrow$ ② $\rightarrow$ ① (senso orario)

$$\begin{aligned} W_{\odot} &= W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1} \\ &= 0 + [-p_2(V_2 - V_1)] + 0 + [-p_1(V_1 - V_2)] = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1) < 0 \end{aligned}$$

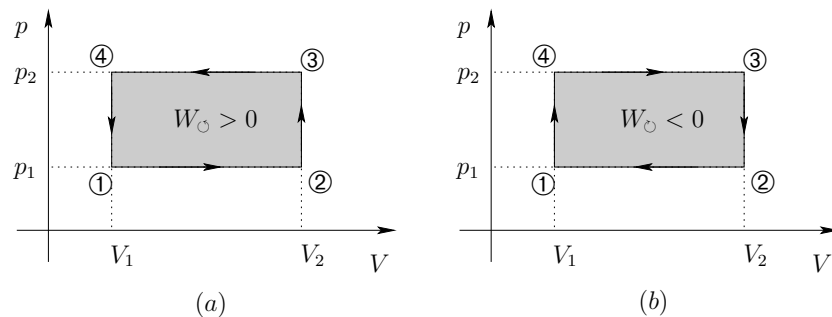


Figura 1.7: Il lavoro W per questo ciclo è non nullo; il suo valore assoluto corrisponde all'area nel diagramma pV . $W_{\odot} > 0$ se il senso di percorrenza del ciclo è antiorario, mentre $W_{\odot} < 0$ se il senso di percorrenza del ciclo è orario.

1.8 Coefficienti termodinamici

Per descrivere completamente il comportamento di un sistema termodinamico, oltre alle grandezze intensive ed estensive già prese in considerazione, è necessario introdurre alcuni coefficienti termodinamici supplementari. Essi sono legati a degli aspetti empirici già discussi nella sezione 1.3 e per i casi considerati qui ve ne sono tre indipendenti, riprendiamo qui questi coefficienti anche nella versione di una trasformazione infinitesimale e deriviamo una relazione tra c_p e c_V per il gas ideale.

Notiamo che *tutti questi coefficienti sono positivi*.

1.8.1 Coefficiente di compressibilità isoterma

Riprendiamo la legge (1.1):

$$\Delta V = -\overline{\kappa_T} V \Delta p$$

κ_T è chiamato **coefficiente di compressibilità isoterma** e *dipende dalla pressione*, qui $\overline{\kappa_T}$ rappresenta il coefficiente di compressibilità isoterma medio nell'intervallo di pressione Δp . Per un aumento di pressione piccolissimo scriveremo

$$dV = -\kappa_T V dp . \quad (1.14)$$

Notiamo che il segno $-$ è stato inserito per avere $\kappa_T > 0$.

Nel caso del gas ideale si dimostra che

$$\kappa_T = \frac{1}{p} .$$

1.8.2 Coefficiente di dilatazione termica isobaro

Riprendiamo la legge (1.2):

$$\Delta V = \overline{\beta_p} V \Delta T$$

β_p è chiamato **coefficiente di dilatazione (volumica) isobara** e *dipende dalla temperatura*, qui $\overline{\beta_p}$ rappresenta il coefficiente di dilatazione isobara medio nell'intervallo di temperatura ΔT .

Per un aumento di temperatura piccolissimo scriveremo

$$dV = \beta_p V dT . \quad (1.15)$$

Nel caso del gas ideale si dimostra che

$$\beta_p = \frac{1}{T} .$$

1.8.3 Calore specifico

Riprendiamo la legge (1.4):

$$Q_x = m\bar{c}_x\Delta T$$

c_x è chiamato **calore specifico** e *dipende dalla temperatura*, qui $\bar{c}_x$ rappresenta il calore specifico medio nell'intervallo di temperatura ΔT . L'indice x sta a indicare il processo con cui è stata trasferita l'energia al sistema (nella modalità calore). Tipicamente per un gas ciò può avvenire a pressione costante o a volume costante. Per un trasferimento di energia piccolissimo scriveremo

$$\delta Q_x = mc_x dT \quad (1.16)$$

Cerchiamo l'espressione di c_V per un *gas ideale*, ossia del *calore specifico a volume costante*. Dal primo principio sappiamo che se $V = \text{cost}$ allora $dU = \delta Q_V$ e per un gas ideale $U = cNk_B T$ e quindi abbiamo

$$\begin{aligned} dU &= cNk_B dT \\ dU = \delta Q_V &= mc_V dT \end{aligned}$$

da cui

$$c_V = \frac{1}{m}cNk_B = c\frac{1}{m}\frac{N}{N_A}N_Ak_B = c\frac{n}{m}R = c\frac{R}{M} \quad \Rightarrow \quad c_V = c\frac{R}{M} > 0 ,$$

dove $M = \frac{m}{n}$ è la massa molare.

È possibile determinare la relazione tra c_V e il *calore specifico a pressione costante* c_p , per far ciò si sfrutta il fatto che U è una funzione di stato e quindi dU *non* dipende dal modo in cui si passa da uno stato all'altro, a differenza del calore che è una grandezza di processo, ossia che dipende dal dettaglio del passaggio tra due stati.

Con questa osservazione possiamo scrivere

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q_p - pdV = mc_p dT - pdV \\ dU &= \delta Q_V = mc_V dT \end{aligned}$$

e utilizzando l'equazione dei gas ideali $pV = Nk_B T$ e l'ipotesi di pressione costante abbiamo $pdV = Nk_B dT$, da cui

$$mc_p dT - Nk_B dT = mc_V dT \Rightarrow c_p = c_V + \underbrace{\frac{1}{m}Nk_B}_{=R/M}$$

la relazione trovata si chiama **relazione di Mayer**

$$c_p = c_V + \frac{R}{M} \quad (1.17)$$

e mostra che c_p e c_V *non* sono coefficienti indipendenti.

Da questa relazione si determina il *calore specifico a pressione costante*

$$c_p = \frac{R}{M}(c + 1) > 0.$$

Abbiamo inoltre

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{c + 1}{c} = \gamma \quad (1.18)$$

e quindi il fattore c che appare nell'energia del gas ideale, macroscopicamente non è nient'altro che un parametro legato al rapporto tra c_p e c_v .

1.9 Equilibri termodinamici

In questa sezione discutiamo, senza dimostrazione, alcuni equilibri termodinamici, ma prima di ciò dobbiamo definire alcuni concetti ed il quadro in cui si inseriscono questi equilibri.

Generalmente per equilibri termodinamici si intende la situazione di equilibrio che si ottiene quando due sottosistemi possono interagire. La situazione iniziale è quella di due sottosistemi isolati (quindi non interagenti) e che in un secondo tempo vengono fatti interagire, modificando le pareti (= vincoli) tra i sottosistemi, e raggiungono una situazione di equilibrio.

Diamo dapprima alcune definizioni.

Le grandezze che caratterizzano lo stato macroscopico ma che non sono tipiche della termodinamica sono dette **grandezze geometriche**, ne sono esempi il volume V e il numero di particelle N . Oltre alle grandezze geometriche, per ottenere una descrizione macroscopica completa è necessario introdurre delle grandezze proprie alla termodinamica, dette **grandezze termodinamiche**. L'energia interna U è un esempio di grandezza termodinamica.

I **sistemi semplici** sono i sistemi termodinamici omogenei che occupano una certa regione macroscopica dello spazio tale che uno **stato di equilibrio** è descritto univocamente da k **variabili geometriche estensive e conservate** e una sola **variabile termodinamica estensiva**.

Esempio. Un gas di argon, composto da N atomi, all'equilibrio in un contenitore che occupa il volume V , sarà caratterizzato da due variabili geometriche estensive e conservate (V, N) e da una variabile termodinamica estensiva, per esempio, l'energia interna U .

Sovente i sistemi studiati in termodinamica sono dei **sistemi composti** formati da un insieme di sistemi semplici in interazione tramite delle pareti permeabili a certe grandezze estensive.

Esempio. Due contenitori come quelli discussi nell'esempio precedente in contatto fra loro tramite una parete permeabile all'energia, oppure permeabile alle particelle, o ancora permeabile al volume (che equivale ad avere una parete mobile).

Le **pareti** discusse sopra sono di particolare importanza nello studio dei sistemi composti; esse rappresentano dei **vincoli** imposti al sistema, che possono essere rimossi parzialmente o interamente.

Classificazione delle pareti (vincoli).

Riportiamo qui di seguito alcune tipiche pareti che rappresentano dei possibili vincoli sul sistema.

- **Parete adiabatica:** parete che non permette scambio di calore e di materia.
- **Parete diatermica:** parete che permette lo scambio di calore ma non di materia.
- **Parete mobile:** parete che permette le variazioni di volume.
- **Parete permeabile ad N_i :** parete che permette lo scambio della sostanza (materia) N_i .

Sono possibili combinazioni di più pareti, per esempio una parete adiabatica che è a sua volta fissa ha come effetto quello di isolare il sistema.

1.9.1 Equilibrio termico

Consideriamo un sistema $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ isolato in cui i sottosistemi Σ_1 e Σ_2 sono separati da una barriera fissa ed adiabatica.

L'ipotesi che Σ è isolato implica che l'energia del sistema è costante; per estensività dell'energia abbiamo

$$U = U_1 + U_2 = \text{costante}$$

inoltre supponiamo che i volumi V_1 e V_2 , come pure i numeri di particelle N_1 e N_2 siano fissati in entrambi i sottosistemi durante tutto il processo che consideriamo.

Ci domandiamo quali saranno le caratteristiche della situazione finale, dopo che la parete adiabatica è rimpiazzata da una parete che permette scambi di energia (parete diatermica).

La *condizione di equilibrio* è data da

$$T_1 = T_2 . \tag{1.19}$$

Vediamo quindi che il concetto di temperatura ci dà un parametro che ci permette di descrivere l'**equilibrio termico** tra due sottosistemi messi a contatto con una parete diatermica

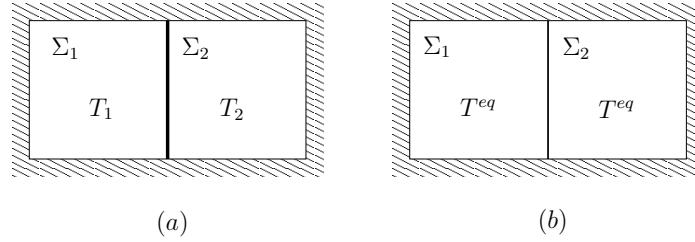


Figura 1.8: Sistema $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ isolato. (a) Tra Σ_1 e Σ_2 vi è una parete fissa e adiabatica e i due sottosistemi si trovano a temperatura T_1 rispettivamente T_2 differenti. (b) La parete adiabatica è rimpiazzata con una parete diatermica e si raggiunge l'equilibrio termico quando i due sottosistemi hanno la stessa temperatura $T_1 = T_2 = T^{eq}$.

1.9.2 Equilibrio termico e meccanico

Consideriamo un *sistema composto* $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ isolato in cui i sottosistemi Σ_1 e Σ_2 sono separati da una barriera fissa ed adiabatica.

Cerchiamo ora lo stato di equilibrio finale se lo stato iniziale è caratterizzato da due temperature e/o pressioni diverse, quando la parete adiabatica è rimpiazzata da una parete diatermica (possibili scambi di energia) ed è resa mobile (“possibili scambi” di volume).

Si dimostra che la *condizione di equilibrio* è

$$T_1 = T_2 \quad \text{e} \quad p_1 = p_2. \quad (1.20)$$

che corrisponde ad un ***equilibrio termico e meccanico***, vedi figura 1.9.

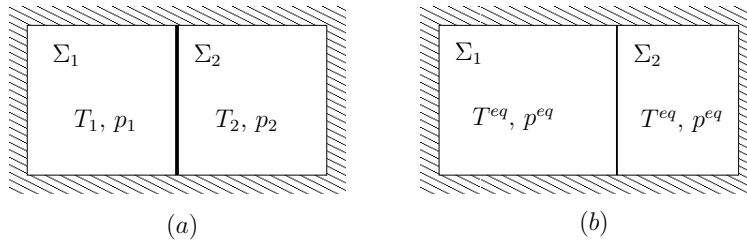


Figura 1.9: (a) Tra Σ_1 e Σ_2 vi è una parete fissa e adiabatica e i due sottosistemi si trovano a temperatura e pressione T_1, p_1 rispettivamente T_2, p_2 entrambe differenti. (b) La parete adiabatica è rimpiazzata con una parete diatermica mobile e si raggiunge l'equilibrio termico e meccanico quando i due sottosistemi hanno la stessa temperatura $T_1 = T_2 = T^{eq}$ e la stessa pressione $p_1 = p_2 = p^{eq}$.

Tale condizione di equilibrio corrisponde a ciò che ci aspettiamo intuitivamente, ossia lo stato finale è quello in cui i due sottosistemi sono caratterizzati dalla stessa temperatura e dalla stessa pressione.

L'uguaglianza della *variabile intensiva* temperatura caratterizza l'equilibrio termico, mentre l'uguaglianza della *variabile intensiva* pressione caratterizza l'equilibrio meccanico.

1.9.3 Equilibrio termico e chimico

Supponiamo ora di avere un *sistema composto* come nel precedente paragrafo, ma con una parete che, oltre a diventare diatermica, permette pure lo scambio di particelle. In modo del tutto analogo a quello discusso precedentemente si mostra che la condizione di equilibrio finale è caratterizzata anche in questo caso ci si attende che la temperatura definisca l'equilibrio termico, e che ci sarà una *grandezza intensiva che caratterizza l'equilibrio chimico*, essa è nota come **potenziale chimico**, notato μ . L'**equilibrio termico e chimico** cercato è dato da

$$T_1 = T_2 \quad \text{e} \quad \mu_1 = \mu_2 \quad (1.21)$$

vedi figura 1.10.

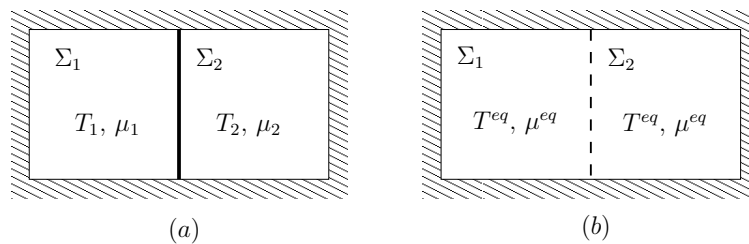


Figura 1.10: (a) Tra Σ_1 e Σ_2 vi è una parete fissa e adiabatica e i due sottosistemi si trovano a temperatura e potenziale chimico T_1, μ_1 rispettivamente T_2, μ_2 entrambe differenti. (b) La parete adiabatica è rimpiazzata con una parete diatermica permeabile alla sostanza e si raggiunge l'equilibrio termico e chimico quando i due sottosistemi hanno la stessa temperatura $T_1 = T_2 = T^{eq}$ e lo stesso potenziale chimico $\mu_1 = \mu_2 = \mu^{eq}$.

In conclusione tutte **le grandezze intensive sono grandezze che permettono di caratterizzare l'equilibrio** tra due (o più) sistemi semplici, dove si considera l'equilibrio relativo ad una parete permeabile ad una certa grandezza estensiva, come riassunto nello schema qui sotto.

Grandezza intensiva	Equilibrio
T	$T_1 = T_2$ equilibrio termico
p	$p_1 = p_2$ equilibrio meccanico
μ	$\mu_1 = \mu_2$ equilibrio chimico

1.10 Secondo principio della termodinamica

Prima di enunciare il secondo principio dobbiamo introdurre la nozione di sistema adiabaticamente chiuso. Un sistema è detto **adiabaticamente chiuso** se *non* scambia energia con l'esterno nella modalità calore **e** non scambia materia.

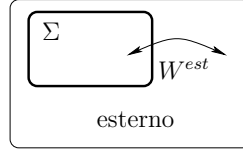


Figura 1.11: Un sistema Σ adiabaticamente chiuso *non* scambia energia con l'esterno nella modalità calore **e** non scambia materia (quindi $W_{chim}^{est} = 0$). L'unica modalità per scambiare energia con l'esterno è quindi il lavoro (W^{est}).

Secondo principio della termostatica.

Per ogni sistema termodinamico Σ esiste un'osservabile, l'**entropia** S^Σ , funzione di stato, scalare, *estensiva* che soddisfa le seguenti condizioni:

- (a) La variazione di entropia tra lo stato di equilibrio iniziale e lo stato di equilibrio finale di un sistema **adiabaticamente chiuso** è sempre non negativa:

$$\Delta S^\Sigma = S_f^\Sigma - S_i^\Sigma \geq 0 \quad (1.22)$$

- (b) Lo stato di equilibrio di un sistema **isolato** $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_M$ formato da M sistemi semplici Σ_i in interazione è tale che l'entropia del sistema totale $S^\Sigma = S^{\Sigma_1} + \dots + S^{\Sigma_M}$ corrisponde ad un **massimo** (locale) **compatibile con i vincoli**.

L'entropia del gas ideale.

Per il gas ideale con $N = N_0$ fissato la *relazione fondamentale*, dato lo stato (U, V, N) , si scrive

$$S(U, V, N) = S_0 + Nk_B \ln \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^c \frac{V}{V_0} \right]$$

dove $S_0 = S(U_0, V_0, N_0)$ è l'entropia di uno stato di equilibrio di riferimento qualsiasi, anche se sovente è lo stato iniziale.

In generale, con N non fissato, la relazione fondamentale si scrive

$$S(U, V, N) = \frac{N}{N_0} S_0 + Nk_B \ln \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^c \frac{V}{V_0} \left(\frac{N_0}{N} \right)^{c+1} \right] \quad (1.23)$$

Commenti.

Tra le condizioni di compatibilità indicate nella parte (b), considerato che il sistema è isolato, avremo sempre che la somma delle grandezze estensive e conservate che descrivono lo stato sarà un numero fissato (per esempio per l'energia $E^\Sigma = E^{\Sigma_1} + \dots + E^{\Sigma_M} = \text{costante}$).

In generale i vincoli sono dati da delle pareti interne al sistema e delle condizioni di isolamento.

Il contenuto della parte (b) del secondo principio della termostatica è la conseguenza della versione “*dinamica*” che afferma:

Per un sistema **isolato** l'entropia del sistema *tende* verso un **massimo** (locale) compatibile con i vincoli, ossia

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S^\Sigma(t) = \text{massimo di } S^\Sigma \text{ compatibile con i vincoli}$$

Questo è particolarmente interessante sul piano concettuale; infatti ne consegue che ***durante un qualsiasi processo in un sistema isolato l'entropia può unicamente aumentare fino al raggiungimento del massimo possibile.***

La parte (b) ci dice pure che, sempre per un sistema **isolato**, uno stato iniziale al quale sono tolti dei vincoli (stato iniziale fuori equilibrio) evolverà verso uno stato di equilibrio finale con entropia maggiore (massimo di entropia con i nuovi vincoli).

Ciò ci mostra che l'evoluzione dallo stato iniziale fuori equilibrio allo stato finale di equilibrio è ***irreversibile***: ossia non è possibile che il sistema ritorni indietro allo stato fuori equilibrio iniziale, poiché in tal caso l'entropia diminuirebbe.

Possiamo citare il seguente esempio (vedi figura 1.12). Un cilindro **isolato** separato in due da una parete (= vincolo), contiene un gas nella parte di sinistra ed è vuoto nella parte di destra, il tutto si trova in uno stato di equilibrio. Se togliamo la parete, il gas si espanderà in tutto il cilindro fino a raggiungere una nuova situazione di equilibrio; l'entropia di questo nuovo stato è maggiore di quello dello stato di partenza ed assume un valore massimo compatibilmente con i vincoli.

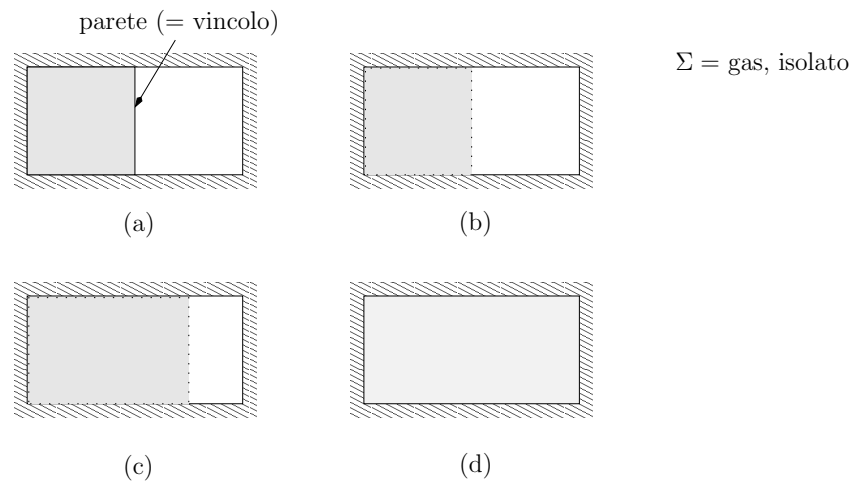


Figura 1.12: (a) stato iniziale di equilibrio. (b) nuovo stato iniziale *non* di equilibrio. (c) stato *non* di equilibrio, ma con entropia maggiore, ma non massima. (d) nuovo stato di equilibrio, entropia massima. I vincoli fissi sono $U = \text{costante}$, $N = \text{costante}$, mentre il vincolo iniziale sul volume ($V \leq V_1$) viene modificato togliendo la parete, il valore massimo dell'entropia nel nuovo stato di equilibrio è calcolato con il vincolo sul volume $V \leq V_2 = 2V_1$.

Analizziamo in dettaglio la funzione $S(U, V, N)$. La condizione di sistema isolato ci dà $U = \text{costante}$ e $N = \text{costante}$, quindi l'unica *variabile libera* di cambiare valore è il volume V e la funzione che dipende solo da V , infatti scegliendo come stato di riferimento $(U_0, V_0, N_0) = (U, V_0, N)$ la relazione (1.23) si scrive:

$$S(V) = S_0 + Nk_B \ln \frac{V}{V_0}$$

e la funzione $S(V)$ è rappresentata nella figura 1.13.

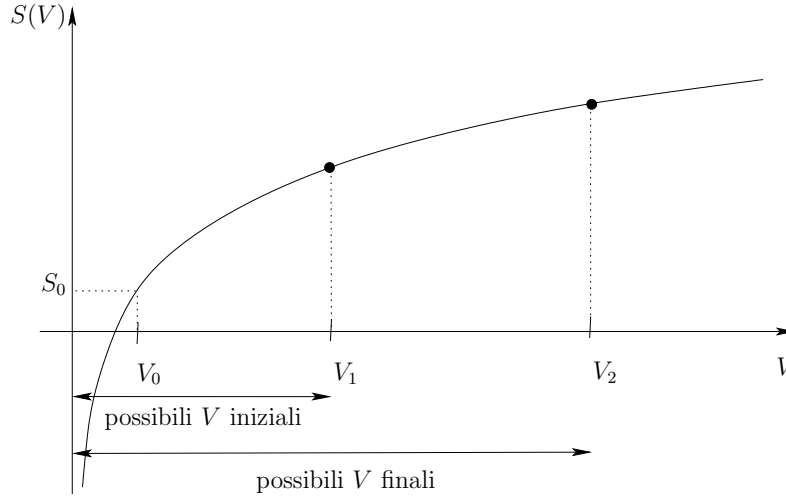


Figura 1.13: Entropia $S(V)$. Gli stati di equilibrio compatibili con i vincoli iniziali sono gli stati (U, V, N) con $V \in [0, V_1]$, lo stato di equilibrio iniziale è (U, V_1, N) , ossia lo stato con entropia massima. Modificato il vincolo sul volume lo stato di equilibrio finale è quello con entropia massima, ossia (U, V_2, N) .

L'**irreversibilità** si caratterizza con il fatto che il gas, una volta espanso in tutto il cilindro, non tornerà più completamente nella parte di sinistra, ossia *non* evolverà verso uno stato di entropia minore.

La parte (b) del secondo principio introduce la **freccia del tempo** orientata dal passato verso il futuro e distingue queste due regioni temporali (vedi anche la sezione 2.4.1). Infatti, l'evoluzione di un sistema isolato tra due stati di equilibrio si fa in una direzione temporale ben precisa, nel senso imposto dal secondo principio ossia verso lo stato di equilibrio con entropia massima, questo senso privilegiato dell'evoluzione temporale permette quindi di distinguere passato e futuro, orientando il senso del tempo. Se $\rho(t_1)$ e $\rho(t_2)$ sono due stati di equilibrio di un sistema isolato, allora l'istante t_1 è antecedente l'istante t_2 se si ha $S(\rho(t_1)) < S(\rho(t_2))$.

Osserviamo che per i sistemi meccanici ideali (ossia senza attrito) l'entropia di un sistema isolato è costante e quindi la parte (b) del secondo principio è priva di senso (entropia costante). Ogni evoluzione di un sistema meccanico ideale è reversibile. Ciò non è sorprendente: abbiamo infatti introdotto l'entropia unicamente per distinguere degli stati meccanici identici in presenza di attrito.

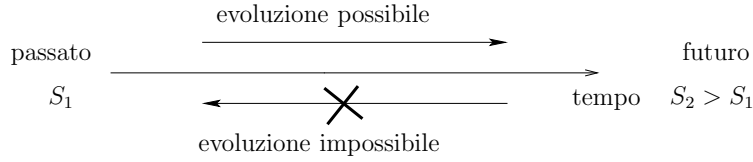


Figura 1.14: L'evoluzione di un sistema isolato tra due stati di equilibrio si fa in una direzione temporale ben precisa, nel senso imposto dal secondo principio ossia verso lo stato di equilibrio con entropia massima.

Questa osservazione ci porta comunque alla seguente domanda: visto che la dinamica microscopica è reversibile nel tempo, ossia data l'evoluzione $t_i \rightarrow t_f$ allora anche l'evoluzione $t_f \rightarrow t_i$ è possibile (per esempio per ogni singolo costituente del gas), come si spiega che l'evoluzione macroscopica è irreversibile? Apparentemente sembra esserci un'inconsistenza tra la dinamica microscopica e la dinamica macroscopica. Questa apparente contraddizione trova spiegazione nell'interpretazione statistica dell'entropia, che però non affrontiamo qui (vedi sezione 2.4.2).

Enunciamo ora la versione infinitesimale del secondo principio.

Secondo principio (versione infinitesimale).

$$dS = \frac{\delta Q^{est}}{T} + \delta_i S \quad (1.24)$$

dove dS è una piccolissima variazione di entropia, $\frac{\delta Q^{est}}{T}$ è la variazione di entropia dovuta allo scambio di calore tra l'esterno ed il sistema (nullo per un sistema adiabaticamente chiuso) e $\delta_i S$ la **produzione interna di entropia**, termine responsabile del comportamento enunciato nella parte (a) del secondo principio, che ricordiamo è positiva: $\delta_i S \geq 0$.

Se consideriamo un sistema isolato allora $\delta Q^{est} = 0$ e dunque $dS = \delta_i S$. Quindi per il sistema *isolato* $\Sigma^{tot} = \Sigma \cup \Sigma^{est}$ vale (utilizzando l'estensività dell'entropia e il fatto che $\delta Q^{est \rightarrow \Sigma} = -\delta Q^{\Sigma \rightarrow est}$)

$$dS^{tot} = \delta_i S^{tot} = \delta_i S^{\Sigma} + \delta_i S^{est} + \underbrace{\delta Q^{est \rightarrow \Sigma} \left(\frac{1}{T^{\Sigma}} - \frac{1}{T^{est}} \right)}_{\geq 0} \quad (1.25)$$

Possiamo subito concludere che, se in ogni sotto sistema non vi è produzione interna di entropia ciò non implica che per il sistema totale la produzione interna di entropia è nulla: la *produzione interna di entropia non è estensiva*.

Per concludere osserviamo che la verifica che l'entropia è una grandezza di stato è possibile considerando il caso in cui $\delta_i S = 0^{12}$, infatti in tal caso

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

¹²Come vedremo per i processi reversibili $\delta_i S = 0$.

ed è possibile verificare che la grandezza $\delta Q/T$ calcolata su processi diversi dà lo stesso risultato, ciò che conferisce a $\delta Q/T$ la caratteristica di una grandezza di stato (attenzione con l'ipotesi $\delta_i S = 0$). Questo permette di dire che esiste una grandezza di stato, che abbiamo chiamato entropia S , tale che per i processi con $\delta_i S = 0$ si calcola come $\delta Q/T$.

1.11 Tipi di processi (o trasformazioni)

Come abbiamo detto la termostatica si occupa, oltre della descrizione degli stati di equilibrio, anche dello studio di particolari trasformazioni o processi termodinamici tra stati di equilibrio. Vediamo ora alcune caratteristiche dei possibili processi, abbiamo illustrato dei processi irreversibili, limitatamente al caso dei sistemi isolati, nella discussione del secondo principio, daremo ora una caratterizzazione dei processi irreversibili in tutta generalità.

Per definizione, un processo di un *sistema isolato* è detto **reversibile** se $\Delta S^\Sigma = 0$. Mentre per un *sistema in interazione* il processo è **reversibile** se si ha

$$\Delta S^{tot} = 0, \quad \text{dove} \quad S^{tot} = S^\Sigma + S^{est}$$

ossia se la variazione dell'entropia *totale* (sistema + esterno = sistema isolato) è nulla. Di conseguenza un processo **irreversibile** è un processo per il quale

$$\Delta S^{tot} > 0.$$

Dalla parte (a) del secondo principio si deduce che per un sistema *adiabaticamente chiuso* l'entropia in un processo (ossia il passaggio da uno stato di equilibrio all'altro) non può diminuire. Abbiamo due possibilità:

1. $\Delta S^\Sigma = 0$: in questo caso l'entropia degli stati di equilibrio iniziale e finale è uguale,
2. $\Delta S^\Sigma > 0$: in questo caso l'entropia dello stato di equilibrio finale è maggiore dell'entropia dello stato di equilibrio iniziale.

La seconda possibilità è caratteristica di un processo *irreversibile*. È però indispensabile e di fondamentale importanza ricordarsi l'ipotesi di sistema *adiabaticamente chiuso*! Osserviamo pure che in un processo *non* adiabatico l'entropia del sistema può aumentare, restare costante ma anche diminuire (per esempio in una compressione isoterma di un gas ideale, quindi in cui $U \propto T$ resta costante, si ha $\Delta S^\Sigma < 0$).

Riassumiamo qui la relazione tra irreversibilità e variazione di entropia.

Sistema isolato	$\Delta S^\Sigma > 0 \Leftrightarrow$ processo irreversibile $\Delta S^\Sigma = 0 \Leftrightarrow$ processo reversibile
Sistema adiabaticamente chiuso	$\Delta S^\Sigma > 0 \Rightarrow$ processo irreversibile processo reversibile $\Rightarrow \Delta S^\Sigma = 0$

Ma per un sistema adiabaticamente chiuso $\Delta S^\Sigma = 0$ non implica la reversibilità del processo, infatti $\Delta S^\Sigma = 0$ implica che non vi è produzione di entropia all'interno di Σ , ma ciò non assicura ancora che $\Delta S^{tot} = \Delta S^\Sigma + \Delta S^{est} = 0$.

Osserviamo che la condizione di processo irreversibile $\Delta S^{tot} > 0$ (che per un processo infinitesimale si scrive $dS^{tot} > 0$) equivale a $\delta_i S^{tot} > 0$. Ora, vista l'equazione (1.25), possiamo **caratterizzare i processi irreversibili** come i processi per i quali almeno una delle tre condizioni seguenti sono verificate:

- *vi è produzione interna di entropia nel sistema,*
- *vi è produzione interna di entropia all'esterno,*
- *vi è una differenza di temperatura tra sistema ed esterno con uno scambio di calore (conduzione termica).*

Quindi la produzione interna di entropia $\delta_i S$ in (1.24) soddisfa:

- per un processo irreversibile $\delta_i S > 0$,
- è una condizione necessaria (ma non sufficiente) per un processo reversibile (ma se reversibile $\delta_i S = 0$).

1.12 Cicli termodinamici e macchine termiche

1.12.1 Macchine termiche e rendimento

Descriviamo prima di tutto gli aspetti fondamentali di ogni **macchina termica**. Una sostanza (= sistema) chiamato fluido operante (l'acqua nel caso della macchina a vapore) assorbe una quantità di energia Q_c nella modalità calore ad una temperatura T_c , compie un lavoro W e cede una quantità di energia Q_f nella modalità calore a una temperatura più bassa T_f , il fluido operante torna poi nel suo stato iniziale. Lo scopo di una macchina termica è di esportare, come lavoro, la maggior parte possibile dell'energia fornita Q_c .

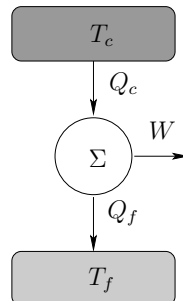


Figura 1.15: Macchina termica funzionante tra un bagno termico a temperatura T_c e uno a temperatura T_f . Sono rappresentate le energie scambiate durante un ciclo tra l'esterno ed il sistema (Σ =gas).

Il teorema del rendimento massimo stabilisce il rapporto massimo tra l'energia messa a disposizione da una macchina termica nella modalità lavoro e l'energia fornita a quest'ultima nella modalità calore.

Teorema del rendimento massimo o teorema di Carnot

Tutte le macchine termiche **reversibili** funzionanti tra un bagno termico caldo a temperatura T_c e un bagno termico freddo a temperatura T_f hanno lo stesso rendimento per qualsiasi tipo di gas e qualsiasi forma del ciclo termodinamico.

Il **rendimento** è definito da

$$\eta = \frac{-W_{\odot}}{Q_c} \quad (1.26)$$

che è il rapporto tra l'energia fornita *dalla* macchina nella modalità lavoro¹³ su di un ciclo e l'energia fornita *alla* macchina nella modalità calore sul ciclo. Nel caso delle macchine termiche reversibili vale:

$$\eta_{\text{reversibile}} = 1 - \frac{T_f}{T_c} .$$

Inoltre, se il ciclo è **irreversibile** allora

$$\eta_{\text{irreversibile}} < \eta_{\text{reversibile}} \quad (1.27)$$

Dimostrazione. Dal primo principio sappiamo che

$$0 = \Delta U = W_{\odot} + Q_{\odot} \quad \Longrightarrow \quad -W_{\odot} = Q_c + Q_f$$

dal secondo principio, sappiamo che per una trasformazione **reversibile** $\delta_i S = 0$ da cui $dS = \delta Q/T$, dove è importante osservare che T è la *temperatura del bagno termico* caldo o freddo, ossia la temperatura alla quale l'energia è scambiata nella modalità calore. Quindi

$$0 = \Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$$

ora il rendimento $\eta_{\text{reversibile}}$ per il ciclo reversibile vale

$$\eta_{\text{reversibile}} = \frac{-W_{\odot}}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} < 1 .$$

Se il ciclo è **irreversibile** allora $\delta_i S > 0$ e quindi

$$0 = \Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + \underbrace{\Delta_i S}_{=I}$$

dove $I > 0$ poiché la produzione interna di entropia è positiva. Quindi

$$\frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c} - I \frac{T_f}{Q_c}$$

da cui

$$\eta_{\text{irreversibile}} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \underbrace{I \frac{T_f}{Q_c}}_{>0} < \eta_{\text{reversibile}} .$$

¹³Osserviamo che la macchina fornisce anche energia nella modalità calore data da Q_f .

Questo risultato lo si interpreta dicendo che nel caso irreversibile, per ottenere lo stesso lavoro $W_\odot$ è necessario prelevare più energia dal bagno termico caldo ($Q_c^{irr} > Q_c^{rev}$).

Il teorema di Carnot, in accordo con i risultati sperimentali, ha quindi come conseguenza che *un ciclo termodinamico il cui **unico** risultato è quello di trasformare in lavoro il calore estratto da un bagno termico di temperatura uniforme è impossibile*¹⁴. Questo risultato storicamente è noto come l'**enunciato di Kelvin** del secondo principio della termodinamica.

Osserviamo che è possibile invertire il ciclo della macchina termica, in tal caso la macchina è detta **pompa di calore**¹⁵: si fornisce energia nella modalità lavoro alla macchina per estrarre energia nella modalità calore dalla sorgente fredda e trasferirla, sempre nella modalità calore, ad una sorgente calda¹⁶ (vedi figura 1.16).

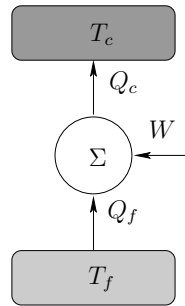


Figura 1.16: Pompa di calore funzionante tra una sorgente di calore a temperatura T_c e una a temperatura T_f con l'apporto di lavoro W .

Sperimentalmente si osserva che per sottrarre energia alla sorgente fredda e conferirla alla sorgente calda (sempre nella modalità calore) è necessario un lavoro: quindi *un ciclo termodinamico il cui **unico** risultato è quello di trasferire energia nella modalità calore da un corpo ad una temperatura data a un corpo ad una temperatura più elevata è impossibile*. Questo risultato storicamente è noto come l'**enunciato di Clausius** del secondo principio della termodinamica.

1.12.2 Alcuni cicli

Il **ciclo di Carnot** è il ciclo termodinamico con *due trasformazioni isoterme e due trasformazioni adiabatiche*, come rappresentato nella figura 1.17. Il gas, supposto ideale, subisce le seguenti trasformazioni:

1. ①→②: compressione isoterma alla temperatura T_f ,

¹⁴In tal caso si avrebbe $\eta = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c}{Q_c} = 1$

¹⁵Anche chiamata macchina frigorifera.

¹⁶Qui parliamo di sorgente di calore piuttosto che di bagno termico, poiché le temperature non rimangono costanti.

2. ②→③: compressione adiabatica (che porta dalla temperatura T_f a T_c),
3. ③→④: espansione isoterma alla temperatura T_c ,
4. ④→①: espansione adiabatica (che porta dalla temperatura T_c a T_f).

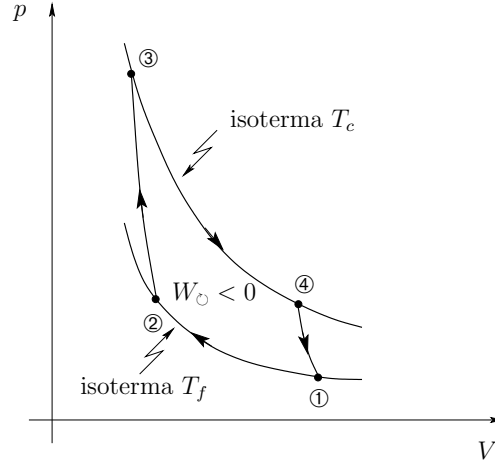


Figura 1.17: Il ciclo di Carnot è composto da due isoterme e due adiabatiche.

In questo caso si ha una macchina termica, se invece il ciclo è invertito si ha una pompa di calore.

Supponendo che il gas è ideale e il ciclo è reversibile si può calcolare facilmente (esercizio) ΔU , ΔS , Q e W per ogni singola trasformazione. Per esempio, per la trasformazione ③→④, si ha

$$\Delta U = U_4 - U_3 = Nk_B T_c - Nk_B T_c = 0 \quad , \quad Q_{3 \rightarrow 4} = -W_{3 \rightarrow 4} = Nk_B T_c \ln \frac{V_4}{V_3} > 0 \quad .$$

Da cui, utilizzando l'equazione (1.11) valida per un'adiabatica, si ottiene

$$Q_c = Nk_B(T_c - T_f) \ln \frac{V_4}{V_3}, \quad W_c = -Nk_B(T_c - T_f) \ln \frac{V_4}{V_3}$$

e quindi il rendimento, che dà

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad .$$

Il **ciclo di Stirling** possiede due trasformazioni isoterme e due trasformazioni isocore ed è rappresentato nella figura 1.18. In questo caso il gas subisce le seguenti trasformazioni:

1. ①→②: compressione isoterma a T_f ,
2. ②→③: riscaldamento isocoro (che porta dalla temperatura T_f a T_c),
3. ③→④: espansione isoterma a T_c ,
4. ④→①: raffreddamento isocoro (che porta dalla temperatura T_c a T_f).

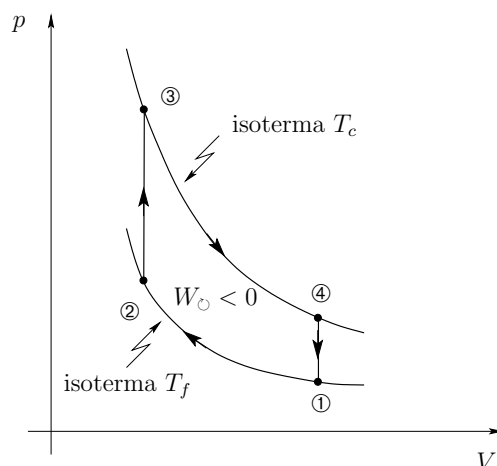


Figura 1.18: Il ciclo di Stirling è composto da due isoterme e due isocore.

In questo caso si ha una macchina termica, se invece il ciclo è invertito si ha una pompa di calore.

Per concludere un piccolo “trucco” per sapere se un ciclo corrisponde ad una macchina termica o ad una pompa di calore

percorrenza	W	tipo
antiorario	> 0	pompa di calore
orario	< 0	macchina termica

1.13 Un modello del gas reale

Abbiamo finora preso in considerazione unicamente il modello del gas ideale, in cui si pongono come ipotesi che le particelle non hanno un volume proprio e che non interagiscono tra di loro. Questo modello è un buon modello tipicamente a bassa densità, ma se quest'ultima cresce le ipotesi del modello non sono più soddisfatte, va quindi modificato qualcosa.

Van der Waals propone di modificare il modello del gas ideale tenendo conto delle seguenti osservazioni.

- Esiste una forte repulsione tra le particelle quando queste sono molto vicine (*repulsione a corta distanza*), ciò ci porta a rappresentarci le particelle del gas come delle bocce di biliardo con un certo diametro σ . *Il volume proprio delle singole particelle non è più trascurabile* e quindi il volume disponibile è minore rispetto a quello del gas ideale.
- Esiste una debole attrazione tra le particelle quando queste sono molto distanti (*attrazione a grande distanza*), ciò crea un aumento della pressione del gas rispetto a quella del gas ideale.

Tenendo conto di queste osservazioni, si ottiene l'equazione dei gas reali, o **equazione di van der Waals**,

$$\left(p + N^2 \frac{a}{V^2}\right) (V - Nb) = Nk_B T \quad (1.28)$$

dove i coefficienti a e b dipendono dal dettaglio dell'interazione tra le particelle; in ogni caso abbiamo $a > 0$ e $b > 0$. Dove p e V sono rispettivamente la pressione e il volume del gas senza interazione (gas ideale).

Con l'ipotesi di particelle come bocce da biliardo di diametro σ allora il volume inaccessibile ad ogni particella è

$$b = \frac{2}{3}\pi\sigma^3 = 4 \left(\frac{4}{3}\pi(\sigma/2)^3\right) = 4 \cdot \text{volume di una particella} \quad (1.29)$$

Infatti, l'interazione coinvolge due particelle e quindi il volume inaccessibile da ogni particella va diviso per due, vedi figura 1.19. Quindi per N particelle il volume disponibile diventa $(V - Nb)$.

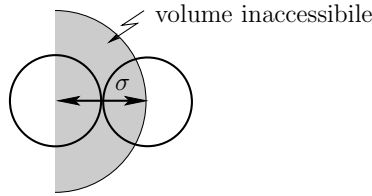


Figura 1.19: Volume inaccessibile per una particella di raggio $\sigma/2$.

L'attrazione a grande distanza viene considerata grazie all'aggiunta di un contributo supplementare alla pressione. Per ogni singola particella tale contributo è proporzionale alla somma delle forze esercitata da ciascuna altra particella; considerando che ogni singola interazione è proporzionale alla densità di particelle (quindi $F \propto \rho$), si ha che alla pressione occorre aggiungere una correzione

$$\text{correzione} \propto \sum F \propto \rho^2 = \left(\frac{N}{V}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{correzione} = a \frac{N^2}{V^2}.$$

Per il parametro a consideriamo un modello in cui le particelle subiscono un'attrazione (= forza) a lunga distanza alla quale è associata un'energia potenziale come raffigurata nella figura 1.20 (modello di Sutherland), questa è una buona approssimazione dell'interazione tra molecole in cui l'energia potenziale ha l'andamento riportato in figura 1.20 (modello di Lennard-Jones).

La caratteristica essenziale dell'interazione tra le particelle è di avere una parte fortemente repulsiva (forza repulsiva=energia potenziale positiva=orbite nello spazio delle fasi che non possono passare per $r = 0$) quando la distanza r tra le particelle è piccola, ciò alfine di evitare che le particelle collassino su se stesse. Al contrario, a media-grande distanza è necessario avere un'interazione attrattiva (forza attrattiva=energia potenziale negativa=orbite chiuse (periodiche) nello spazio delle fasi per valori negativi dell'energia), ciò alfine di evitare l'esplosione del sistema.

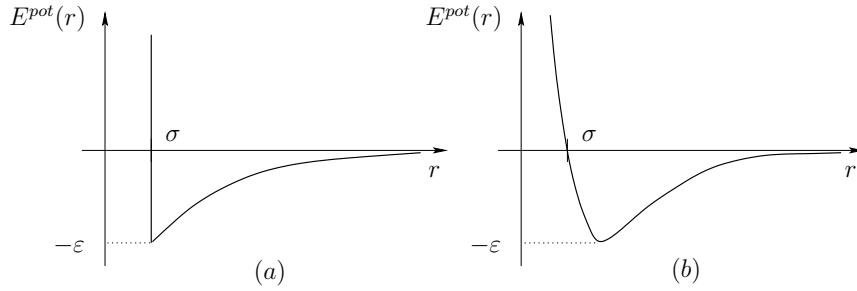


Figura 1.20: (a) Energia potenziale (r è la distanza tra le particelle) d'interazione tra due molecole con il modello di Sutherland e (b) con il modello Lennard-Jones.

Nel primo caso (modello di Sutherland) si dimostra che, nel caso di *alte temperature e densità non troppo elevate* ($-\varepsilon$ corrisponde al minimo dell'energia potenziale d'interazione)

$$a = \frac{2}{3}\pi\sigma^3\varepsilon > 0. \quad (1.30)$$

È interessante rappresentare nel diagramma pV le isoterme per l'equazione di van der Waals (vedi figura 1.21), e confrontarla con il caso del gas ideale, in cui sappiamo che le isoterme sono rami di iperbole (vedi figura 1.5).

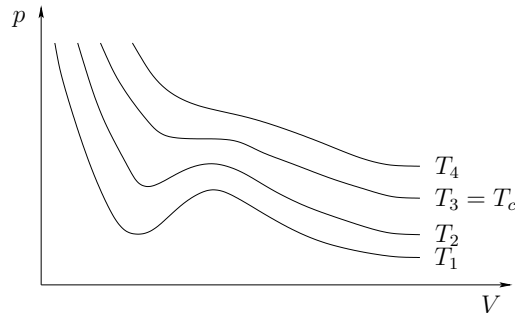


Figura 1.21: Isotherme nel diagramma pV per il gas reale (equazione di van der Waals).

Si notano due zone in cui il comportamento è differente.

- Se $T > T_c$, in particolare se $T \gg T_c$, allora il gas reale si riduce approssimativamente al gas ideale. La curva è approssimativamente un ramo di iperbole.
- Se $T < T_c$ abbiamo una curva completamente diversa da un'iperbole, importante è osservare subito che esistono delle zone in cui all'aumentare del volume aumenta anche la pressione (sono gli intervalli per i quali p è una funzione crescente di V). In queste zone la legge (1.14) ci dà un valore *negativo* della compressibilità isoterma ($dV > 0 \Leftrightarrow dp > 0$): $\kappa_T < 0$. Questa condizione non rappresenta un comportamento possibile del gas e quindi queste parti del diagramma pV sono “non fisiche”. Ciò nonostante, come vedremo nella prossima sezione, questo *comportamento anomalo della compressibilità isoterma* è legato ad una *transizione di fase*.

- Per $T = T_c$ la curva nel diagramma pV ha una piccolissima zona in cui il grafico è orizzontale, ciò corrisponde al fatto che, in quel punto una piccolissima variazione del volume ($dV > 0$) non comporta una variazione della pressione ($dp = 0$), e dalla legge (1.14), possiamo vedere che in quella piccolissima zona

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \implies \kappa_T = \infty$$

si ha quindi una compressibilità isoterma infinita, anche in questo caso il *comportamento anomalo della compressibilità isoterma* è il segno di una *transizione di fase* (vedi sezione 1.14).

1.14 Transizioni di fase

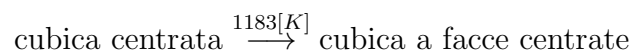
1.14.1 Generalità

Come prima cosa dobbiamo definire cosa è una fase per un sistema termodinamico. Prima di dare la definizione ecco alcuni esempi: un liquido omogeneo (che non deve essere per forza chimicamente puro) è costituito da una sola fase, un sistema composto da acqua e vapore o una soluzione satura di sale in acqua con eccesso di sale solido sono esempi di sistemi termodinamici composti da due fasi. Una **fase** di un sistema termodinamico è quindi un *sottosistema omogeneo*. Nello studio delle transizioni di fase un sistema termodinamico Σ è composto da diversi sottosistemi $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_f$, dove ogni sottosistema Σ_i rappresenta una fase. Nell'esempio acqua e vapore abbiamo $\Sigma = \Sigma_{\text{acqua}} \cup \Sigma_{\text{vapore}}$.

Diremo che la **fase** è **aperta** (o, in modo equivalente, che il sottosistema è aperto) se può scambiare materia con il resto del sistema. *Qui di seguito consideriamo unicamente il caso di sistemi chiusi le cui fasi sono aperte.*

Se per diversi valori delle variabili intensive (tipicamente T e p) di un sistema omogeneo, quest'ultimo può presentarsi in fasi differenti, è possibile osservare il passaggio da una fase all'altra modificando il valore dei parametri *intensivi*. In questo caso diremo che si ha una **transizione di fase**. Il caso più semplice è quello in cui il sistema è composto una sola componente chimica, per esempio H_2O . In questo caso abbiamo tre fasi: la *fase solida* (ghiaccio), la *fase liquida* (acqua) e la *fase gassosa* (vapore acqueo). La terminologia per i diversi cambiamenti di fase è riassunta nella figura 1.22.

Osserviamo che esistono anche delle transizioni di fase che non coinvolgono un cambiamento da liquido a solido e gassoso, infatti molte sostanze pure possono esistere in fase solida con *differenti strutture cristalline*. Per esempio il ferro ha la seguente transizione di fase in cui, pur presentandosi sempre nella fase solida, cambia la struttura cristallina (vedi figura 1.23):



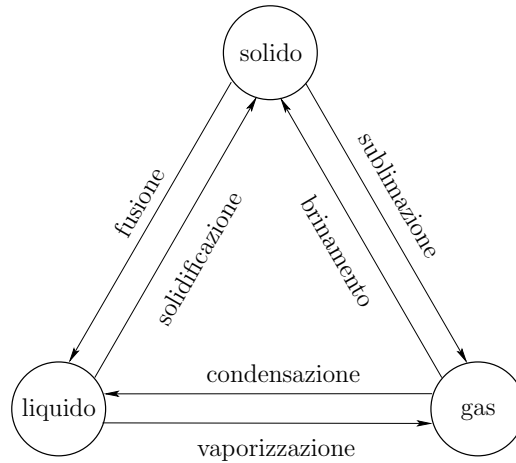


Figura 1.22: Terminologia per i diversi cambiamenti di fase per un sistema composto da una sola componente chimica che possiede la fasi solida, liquida e gassosa.

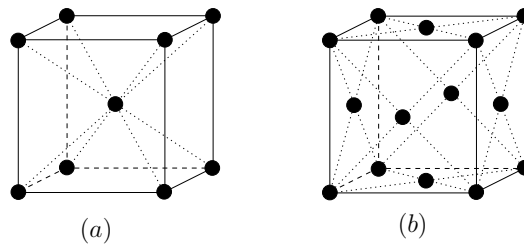


Figura 1.23: Strutture cristalline: (a) cubica centrata, (b) cubica a facce centrate. In ogni punto si trova un atomo (di ferro nel caso discusso qui).

Citiamo ancora, come esempio di transizione di fase, quella del ferro da una fase detta *paramagnetica*, in cui non esibisce alcuna proprietà magnetica a livello macroscopico, alla fase *ferromagnetica*, in cui invece si osservano delle proprietà magnetiche macroscopiche. Questa transizione avviene diminuendo la temperatura al di sotto di $1043[K]$.

Vediamo quindi che i possibili stati della materia (ossia le differenti fasi) non possono essere riassunte semplicemente in solido, liquido e gassoso, ma la situazione è ben più complessa. Ciò nonostante queste tre fasi sono di particolare importanza ed è per questo motivo che in questa sezione ci occuperemo delle transizioni tra queste fasi.

1.14.2 Equilibrio tra fasi: la regola delle fasi

Un concetto utile nella descrizione di una fase è quello di **gradi di libertà della fase** (notato ν), esso è definito come il numero di variabili che è necessario fissare per descrivere completamente la fase, ciò non è nient'altro che il numero di osservabili che descrivono lo stato della fase.

Si ha la regola seguente: *In una fase aperta, i gradi di libertà ν sono $(2 + r)$, dove r è il numero di componenti chimiche, inoltre almeno una delle variabili deve essere estensiva.*

Esempio. Per una fase aperta composta da r componenti chimiche, lo stato può essere descritto da $(U, V, N_1, \dots, N_r)$ e quindi $\nu = 2 + r$. Potremmo anche descrivere lo stato con $(T, p, N_1, \dots, N_r)$.

Osserviamo che se la fase fosse chiusa allora $\nu = 2 + (r - 1)$ poiché le r variabili N_i non sono indipendenti visto che $N_1 + \dots + N_r = N$ è fissato (= condizione di fase chiusa).

Se consideriamo un sistema all'*equilibrio* composto da f fasi aperte e in cui abbiamo r componenti chimiche, allora il *numero di variabili intensive indipendenti* è dato dalla **regola delle fasi di Gibbs**:

$$\nu_{\text{intensive}} = r - f + 2 \quad (1.31)$$

Esempi.

- Liquido omogeneo ($f = 1$) composto da un costituente chimico ($r = 1$): $\nu_{\text{intensive}} = 2$. Possiamo scegliere in modo indipendente le variabili (T, p) .
- Sistema composto da acqua e ghiaccio ($f = 2, r = 1$): $\nu_{\text{intensive}} = 1$. Possiamo scegliere arbitrariamente solo la temperatura, la pressione sarà allora determinata da una relazione $p = p(T)$.
- Sistema composto da acqua, ghiaccio e vapore acqueo ($f = 3, r = 1$): $\nu_{\text{intensive}} = 0$. Non è possibile scegliere liberamente le variabili, le tre fasi possono coesistere unicamente per determinati valori di p e T : si parla di **punto triplo** (vedi figura 1.25).

1.14.3 Calore latente di trasformazione

Nella sezione 1.8.3 abbiamo trattato il caso in cui un trasferimento di energia al sistema nella modalità calore comporta un aumento di temperatura. Un'altra possibilità nel caso di questo trasferimento di energia dall'esterno al sistema è quello che porta ad una transizione di fase, per esempio solido $\rightarrow$ liquido.

Empiricamente si trova che per trasformare una data massa da una fase all'altra è necessario trasferire una quantità di calore proporzionale a tale massa:

$$Q \propto m$$

e quindi per una trasformazione piccolissima, introducendo una costante di proporzionalità, possiamo scrivere

$$\delta Q = \mathcal{L} dm \quad (1.32)$$

dove $\mathcal{L}$ è chiamato **calore latente di trasformazione**.

Osserviamo che durante una transizione di fase, che avviene a pressione e temperatura costante e accompagnata da un calore latente di trasformazione, il calore specifico a

pressione costante ha un comportamento anomalo, infatti da (1.16) (con $x = p$) e (1.32) abbiamo

$$c_p = \frac{\delta Q_p}{m dT} = \frac{\mathcal{L} dm}{m dT} = \infty$$

poiché $\mathcal{L} \neq 0$ e $dT = 0$.

Come abbiamo già accennato per il gas di van der Waals un comportamento anomalo dei coefficienti termodinamici è caratteristico delle transizioni di fase.

Se consideriamo due fasi aperte α e β in equilibrio parziale di temperatura e pressione, costituite da una sola componente chimica, allora la regola delle fasi ci dà $\nu_{\text{intensive}} = 1$ ciò vuole dire che la pressione è una funzione della temperatura $p = p(T)$. Se rappresentiamo in un diagramma pT questa funzione, allora il calore latente di trasformazione $\mathcal{L}$ è legato alla pendenza del grafico $p(T)$ che descrive la coesistenza delle fasi α e β .

L'equazione che lega la pendenza $\frac{dp}{dT}$ ad $\mathcal{L}$ è nota come **equazione di Clausius-Clapeyron** che afferma

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\mathcal{L}_{\alpha \rightarrow \beta}}{1/\rho_\beta - 1/\rho_\alpha} \quad (1.33)$$

dove $\mathcal{L}_{\alpha \rightarrow \beta}$ è il calore latente di trasformazione nella transizione $\alpha \rightarrow \beta$ e ρ_α, ρ_β le densità delle due fasi.

L'equazione di Clausius-Clapeyron ci permette per esempio di stabilire, una volta conosciuta la pendenza $\frac{dp}{dT}$ la relazione tra il segno di $\mathcal{L}_{\alpha \rightarrow \beta}$ e di $\rho_\alpha - \rho_\beta$. Per esempio nelle transizioni solido $\rightarrow$ liquido, liquido $\rightarrow$ gas e solido $\rightarrow$ gas, si ha $\mathcal{L} > 0$ che equivale a dire che per la transizione di fase è necessario fornire energia al sistema ($Q > 0$); quindi se si osserva una pendenza positiva se ne può concludere che

$$\rho_{\text{solido}} > \rho_{\text{liquido}} > \rho_{\text{gas}} ,$$

vedi figura 1.25 (a).

1.14.4 Transizioni di fase s, ℓ, g e modello di van der Waals

In questa sezione analizzeremo le transizioni per un sistema costituito da una sola componente chimica e che possiede le fasi solida, liquida e gassosa. Osserviamo che le transizioni di fase considerate qui avvengono a *temperatura e pressione costante*.

Per lo studio di queste transizioni di fase è particolarmente utile conoscere la relazione tra p, T e V poiché gli stati di equilibrio possibili si situano su una superficie bidimensionale nello spazio tridimensionale con assi (p, T, V) ; possiamo proiettare questa superficie sui piani $p-T$ o $p-V$ e in tal caso otteniamo i **diagrammi di fase** detti **diagramma pT** e **diagramma pV** , vedi figura 1.24.

Studiamo dapprima il diagramma pT , di cui riportiamo due esempi nella figura 1.25.

In questo diagramma ogni punto rappresenta un possibile *stato* del sistema e ci informa, dato un valore di pressione e temperatura, in che fase si presenta la sostanza pura. Fanno

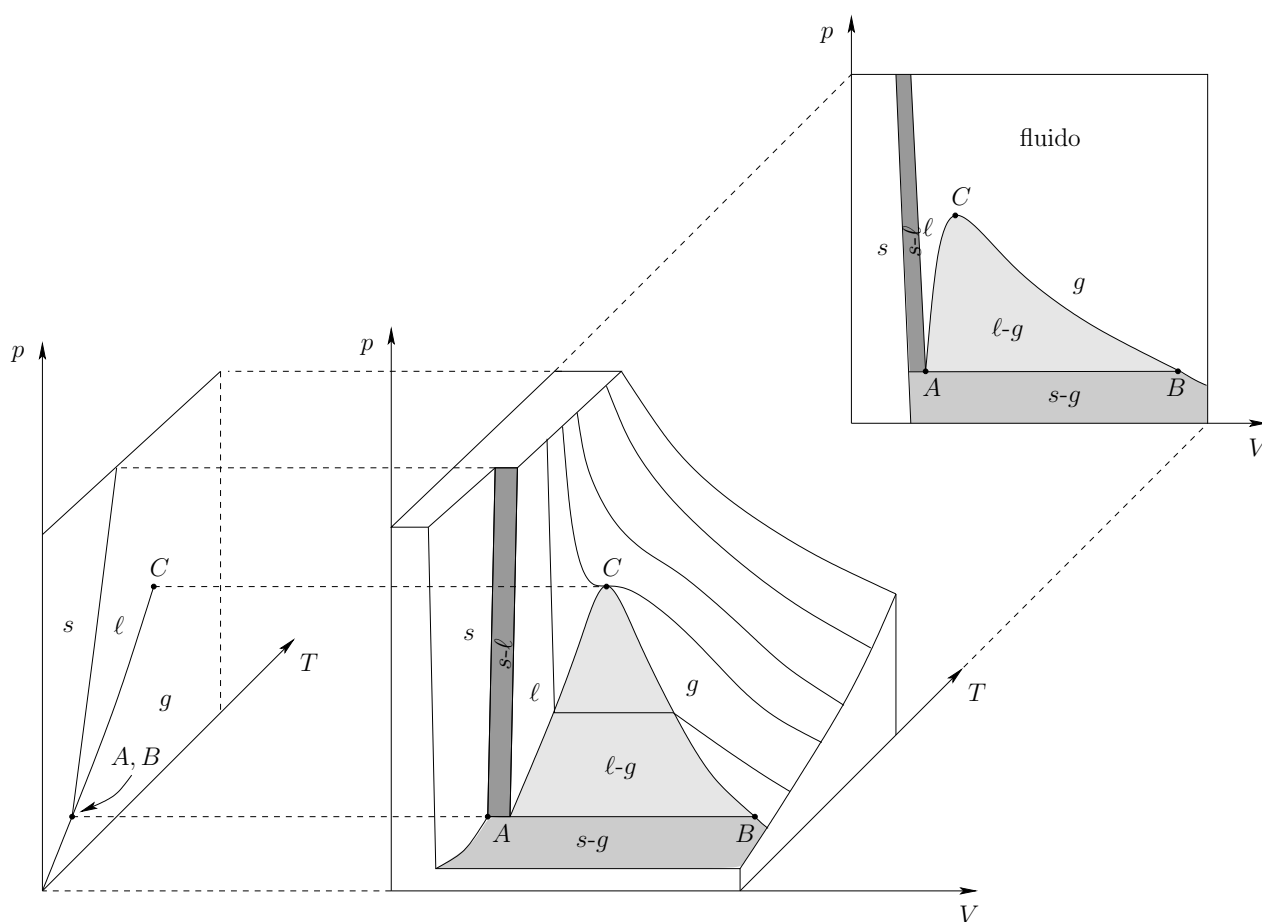


Figura 1.24: Superficie tipica per un sistema solido-liquido-gassoso e relativi diagrammi pT e pV . s, ℓ, g indicano le tre fasi, sono inoltre rappresentate le zone di coesistenza tra fasi. Oltre il punto critico C le fasi ℓ e g sono irriconoscibili e si dice semplicemente *fluido*.

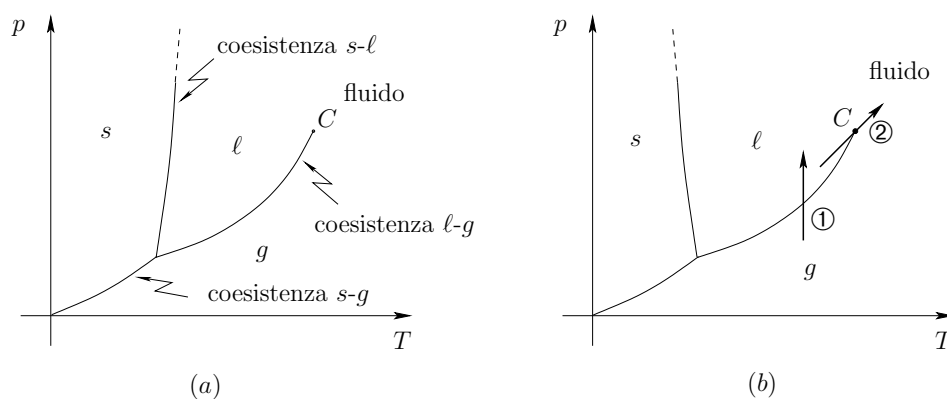


Figura 1.25: (a) Diagramma pT per il CO_2 . (b) Diagramma pT per l' H_2O (si noti la pendenza negativa della curva di coesistenza $s-\ell$, dovuta a $\rho_s < \rho_\ell$, disuguaglianza valida a pressione non troppo elevata).

eccezione i punti sulle linee tracciate nel grafico, esse corrispondono alle linee in cui si ha coesistenza tra più fasi come si può notare dal grafico tridimensionale. Si hanno le seguenti linee di coesistenza:

- coesistenza solido–liquido: transizione di fusione/solidificazione,
- coesistenza solido–gas: transizione di sublimazione/brinamento,
- coesistenza liquido–gas: transizione di condensazione/vaporizzazione.

Inoltre all'incrocio delle tre linee di coesistenza abbiamo il **punto triplo**, in cui le tre fasi coesistono. Da notare che la linea di coesistenza liquido–gas termina nel punto C , chiamato **punto critico**. Ciò permette di passare dalla fase liquida alla fase gassosa contornando il punto critico, in questo caso non si ha nessun calore latente di trasformazione $\mathcal{L} = 0$.

Dal diagramma pT possiamo identificare due transizioni di fase qualitativamente diverse.

- La prima classe corrisponde all'attraversamento di una linea di coesistenza (per esempio ①), in cui si osserva una *discontinuità della densità*, un *calore specifico di trasformazione non nullo* e la coesistenza di due fasi: queste caratteristiche sono tipiche della **transizioni di fase** dette **di primo ordine**.
- La seconda classe corrisponde all'attraversamento del punto critico (per esempio ②). In questo caso avvicinandosi al punto critico si osserva un comportamento bizzarro del sistema. Seguendo la linea ② si osserva che per $T < T_c$ si ha la fase liquida omogenea e trasparente, avvicinandosi a T_c il sistema diventa sempre più opaco (si parla di *opalescenza critica*) in cui liquido e fluido non si distinguono, poi quando $T > T_c$ si ritrova la fase fluida uniforme e trasparente; al punto critico il sistema non è né nella fase liquida, né nella fase fluida, ma in una fase complessa che si crea avvicinandosi ad esso. In questa transizione di fase, a differenza della precedente, non si osserva nessuna discontinuità della densità e nessun calore specifico di trasformazione $\mathcal{L} = 0$. Inoltre non si ha una vera coesistenza delle due fasi. Queste caratteristiche sono tipiche della **transizioni di fase** dette **di secondo ordine (o continue)**.

Studiamo ora il diagramma pV di cui riportiamo un esempio nella figura 1.26 e ci concentriamo sulla *transizione liquido $\leftrightarrow$ gas*.

Se $T > T_c$ allora *non si osserva alcuna transizione di fase*, le isoterme sono simili a dei rami di iperbole. Per $T = T_c$, si ha la transizione di fase descritta sopra (secondo punto), l'isoterma $T = T_c$ presenta un piccolissimo plateau, e si ha un comportamento anomalo della compressibilità isoterma: $\kappa_T = \infty$ (vedi anche discussione delle isoterme del gas di van der Waals a pagina 34).

Per $T < T_c$ si ha invece la transizione descritta sopra (primo punto), in cui si ha coesistenza delle fasi liquida e gassosa. Nel diagramma pV si osserva un caratteristico *plateau*. Tutti i punti sul plateau corrispondono ad un unico valore di temperatura e pressione, ma si distinguono per il volume (e quindi la densità); essi corrispondono alla transizione di fase.

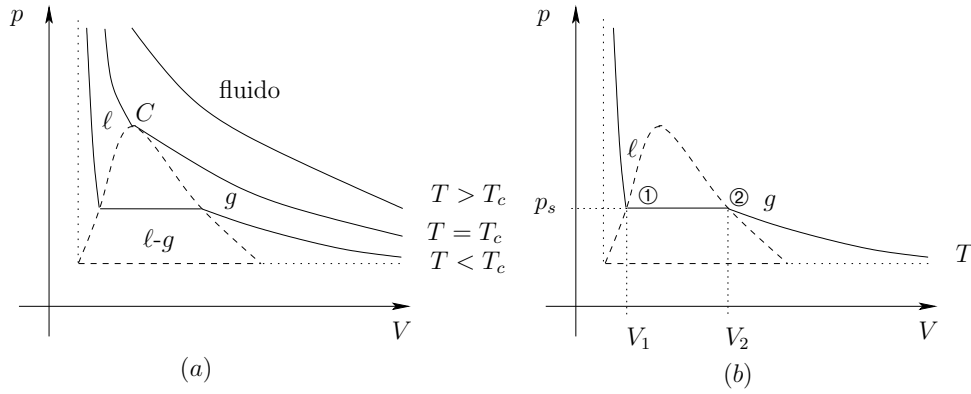


Figura 1.26: (a) Tre isoterme nel diagramma pV . (b) Isoterma nel diagramma pV per $T < T_c$, si osserva il caratteristico plateau e la zona di coesistenza delle fasi liquida e gassosa.

All'estremo ① identificato con $(p_s, V_1, T)^{17}$ si ha una fase omogenea di alta densità ($\rho \propto 1/V$), inoltre diminuendo ancora il volume la pressione aumenta velocemente, segno di una debole copressibilità isoterma¹⁸: si tratta della fase liquida.

All'altro estremo ② del plateau si ha invece un'altra fase omogenea identificata con (p_s, V_2, T) con densità inferiore (poiché $V_2 > V_1$) ed una maggiore compressibilità isoterma: si tratta della fase gassosa. Nei punti intermedi coesistono entrambe le fasi.

Percorrendo l'isoterma da ① a ② si osserva l'apparizione della nuova fase gassosa assieme alla fase liquida che progressivamente scompare, le due fasi sono separate da un menisco, vedi figura 1.27.

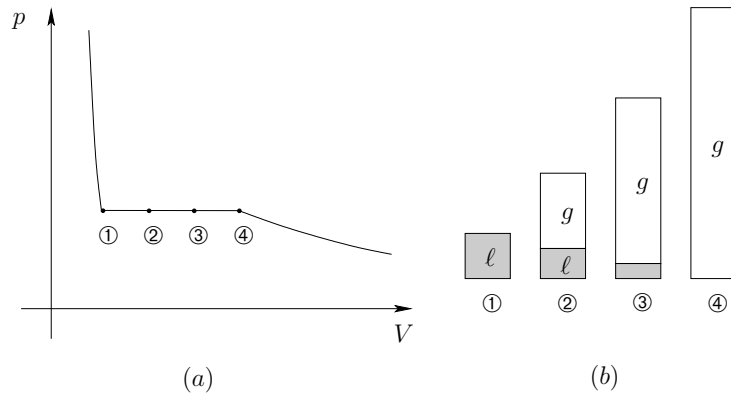


Figura 1.27: (a) Quattro punti sul plateau della transizione $\ell \rightarrow g$. (b) Composizione delle due fasi nei quattro punti del diagramma pV : il volume totale del sistema cambia con la modifica della proporzione della sostanza nella due fasi a causa della differente densità.

¹⁷ p_s è chiamata *pressione di saturazione*, e dipende solo dalla temperatura T .

¹⁸La compressibilità isoterma soddisfa

$$\frac{1}{\kappa_T} \propto \frac{dp}{dV}$$

e $\frac{dp}{dV}$ è la pendenza del grafico $p(V)$.

Il comportamento appena descritto è ben rappresentato dalle isoterme del modello di van der Waals, le quali però non presentano il caratteristico plateau per $T < T_c$. Una costruzione, nota come **costruzione di Maxwell**, permette di correggere le isoterme. Data un'isoterma $T < T_c$, il plateau va posto fra i punti A e B scelti in modo tale che le aree ① e ② risultino uguali, vedi figura 1.28.

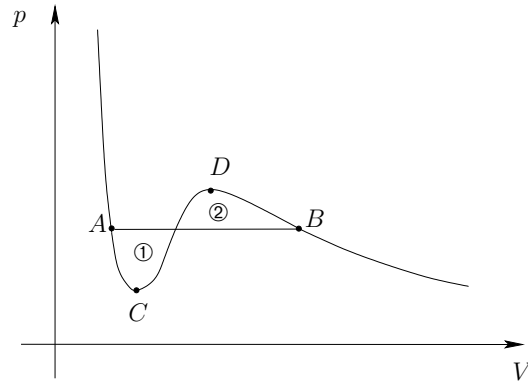


Figura 1.28: La costruzione di Maxwell permette di correggere le isoterme di van der Waals $T < T_c$. Le aree ① e ② devono essere uguali.

Osserviamo pure che è comunque possibile percorrere l'isoterma di van der Waals seguendo il tratto AC oppure il tratto BD . In queste situazioni si hanno delle fasi omogenee liquida, rispettivamente gassosa. Questo è però possibile solo se il processo è sufficientemente lento (per esempio una compressione del gas o un'espansione del liquido molto lenta). In tal caso il liquido non diventa gas dopo il punto A ma si trova in una fase detta **liquido sottoraffreddato**; mentre il gas dopo il punto B non diventa liquido ma si trova in una fase detta **gas surriscaldato**. Queste fasi sono però *metastabili*, nel senso che una perturbazione esterna del sistema (per esempio un urto del recipiente contenente la sostanza) riporta quest'ultimo in una situazione di coesistenza tra liquido e gas (un punto lungo il plateau AB).

Capitolo 2

Verso la fisica statistica

2.1 Introduzione

Abbiamo finora studiato la termodinamica, teoria macroscopica il cui stato è definito da poche variabili e la meccanica di un singolo punto materiale (vedi corso di prima liceo) il cui stato è definito dalla coppia $(\vec{x}, \vec{p})$ oppure da $(\vec{x}, \vec{v})$. Questi due capitoli sono stati sviluppati in modo abbastanza separato, ma fondamentalmente un gas è un insieme di tantissimi punti materiali, le particelle che lo costituiscono. In questo capitolo vogliamo studiare le interconnessioni tra la meccanica e la termodinamica.

2.2 Dal micro al macro: il procedimento di media

La meccanica, l'elettromagnetismo e la termodinamica sono tre branche parallele della fisica macroscopica. Possiamo spiegarci questa divisione naturale considerando la natura delle osservazioni macroscopiche e la loro relazione con la struttura della materia.

Da un punto di vista atomico, un campione macroscopico di materia è un agglomerato formato da un enorme numero di elettroni e di nuclei: una descrizione matematica completa dello *stato* del campione consisterebbe quindi nella determinazione della posizione e della quantità di moto relative ad ogni elettrone e ad ogni nucleo. Ciò comporta, ad esempio, che per descrivere lo stato di un litro di alcool occorrerebbero 10^{24} o 10^{25} coppie $(\vec{x}, \vec{p})$! Questo tipo di descrizione è sicuramente valido in un certo senso, ma non è evidentemente adatto per chi deve scrivere l'etichetta da incollare sulla bottiglia. Per descrivere un sistema da un punto di vista macroscopico, occorrono pochissimi parametri: infatti, passando dal *livello microscopico* (livello atomico) a quello *macroscopico*, noi attuiamo una incredibile semplificazione, riducendo drasticamente il numero delle variabili in gioco.

La ragione della semplicità delle osservazioni macroscopiche sta nei *tempi* richiesti per effettuare le misure macroscopiche: tali tempi sono infatti assai lunghi, se confrontati con quelli caratteristici dei movimenti, rapidi e complicati, degli atomi.

Una misura macroscopica di lunghezza può essere compiuta ponendo un metro di fronte all'oggetto da misurare e scattando quindi una fotografia. Il tempo della misura è determinato dal tempo di esposizione della pellicola, e si aggira sul centesimo di secondo:

ma i tempi caratteristici dei moti atomici sono dell'ordine di 10^{-15} secondi! Anche durante le misure più rapide, portate a termine in un microsecondo, gli atomi dei solidi più comuni compiono almeno dieci milioni di vibrazioni. Di conseguenza, *compiendo delle misure macroscopiche noi effettuiamo automaticamente delle medie sulle variabili atomiche, e quindi eliminiamo tali variabili dalla descrizione del sistema*. Il numero di variabili per descrivere lo stato del sistema è così ridotto dalle medie statistiche: delle 10^{24} variabili che erano in origine, ne rimangono alcune, che vengono pertanto utilizzate per la descrizione macroscopica. Possiamo dare un'idea con un semplice esempio.

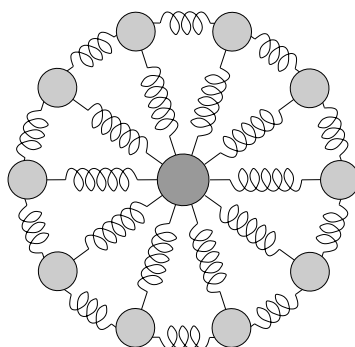


Figura 2.1: Un sistema composta da undici atomi, di cui uno pesante al centro, e dieci leggeri all'esterno.

Supponiamo di considerare un sistema macroscopico come quello rappresentato in figura 2.1, formato non da 10^{24} , ma da soli undici atomi, di cui uno, pesante, al centro, e dieci, leggeri, disposti simmetricamente intorno a quello pesante. Ciascun atomo è vincolato al proprio vicino da forze di tipo elastico, rappresentate dalle “molle” che compaiono nella figura 2.1.

I movimenti dei vari atomi sono fortemente vincolati tra loro, per cui gli atomi tendono a spostarsi con movimenti coordinati.

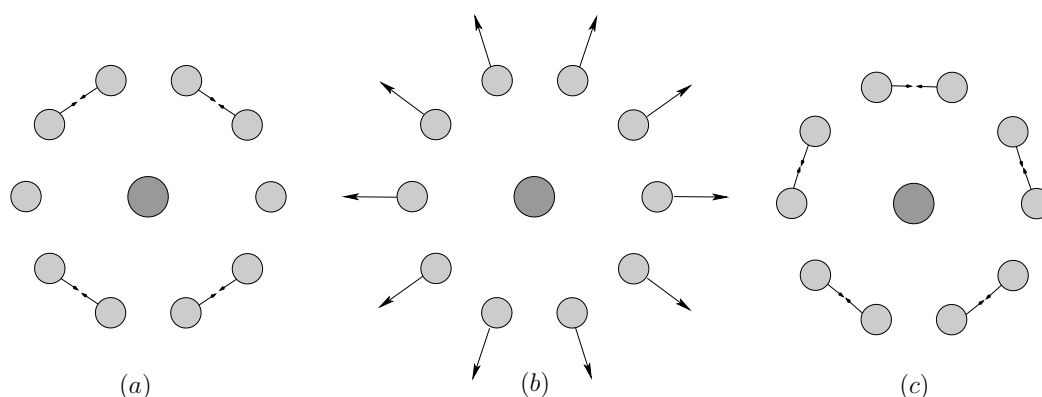


Figura 2.2: Macroscopicamente le configurazioni (a) e (c) sono uguali, benché a livello microscopico non lo sono; esse macroscopicamente si differenziano dalla configurazione (b) per un volume differente. Il volume è una variabile macroscopica.

In figura 2.2(a) due atomi rimangono fermi, mentre gli altri vibrano a coppie lungo direzioni tangenziali; in figura 2.2(b) tutti gli atomi leggeri vibrano lungo direzioni radiali; in figura 2.2(c) gli atomi leggeri contigui vibrano lungo direzioni tangenziali. Ci sono molti altri modi di movimento, ma i tre particolari che abbiamo considerato sono sufficienti per la nostra discussione.

Vogliamo comprendere qualitativamente in che modo, nelle medie statistiche, si perdono le informazioni sulle posizioni e sulle quantità di moto¹ e come mai rimangono unicamente poche variabili macroscopiche.

In un sistema macroscopico composto da undici atomi non possiamo fare una distinzione precisa tra osservazioni a livello macroscopico e a livello atomico. Tuttavia, potremo utilizzare in questo senso il nostro modello supponendo che le osservazioni macroscopiche siano delle osservazioni grossolane, che rilevano le caratteristiche essenziali, ma non i particolari. È come se le osservazioni macroscopiche fossero eseguite guardando il sistema attraverso un vetro affumicato; l'impossibilità di apprezzare i minimi particolari corrisponde qualitativamente alle medie statistiche che vengono effettuate nelle osservazioni macroscopiche reali.

Se osserviamo attraverso un vetro affumicato il movimento schematizzato in figura 2.2(a) e in figura 2.2(c), non ci sarà possibile osservare un cambiamento della forma. Il movimento di figura 2.2(b) è invece associato ad un evidente cambiamento della forma del sistema, e in definitiva è una dilatazione del suo volume: di conseguenza, il volume è un parametro valido nella descrizione macroscopica del sistema. Dei nostri tre modi di movimento microscopico degli atomi, due non sono distinguibili macroscopicamente; nel processo di media il *volume* rimane quale unica variabile per la descrizione macroscopica del sistema.

L'esempio ora discusso illustra un risultato assai generale: dalle miriadi di variabili che descrivono lo *stato microscopico* rimangono come parametri validi per una descrizione dello *stato macroscopico* unicamente un piccolo numero di variabili.

In relazione alle definizioni che abbiamo dato nel capitolo dedicato alla termodinamica possiamo dire che le grandezze geometriche sono quelle che caratterizzano lo stato macroscopico e che derivano dai procedimenti di media (ne sono esempi il volume V e il numero di particelle N). Mentre le grandezze termodinamiche sono quelle che è necessario introdurre per tradurre l'effetto della moltitudine di variabili che nei processi di media spariscono nella descrizione macroscopica, ma che hanno comunque un'importanza a livello macroscopico (ne sono esempi l'entropia S e l'energia interna U).

¹Tutte queste possibili configurazioni microscopiche equivalgono a conoscere lo stato microscopico di ogni singolo atomo.

2.3 Interpretazione microscopica di p , T ed U

Abbiamo finora studiato la termodinamica come teoria macroscopica, ossia abbiamo studiato i sistemi considerandoli come un'entità macroscopica. Vogliamo ora dare alcuni elementi microscopici in relazione al modello del gas ideale studiato nella sezione 1.4 e ampiamente utilizzato nelle illustrazioni, in cui daremo un'interpretazione microscopica alla temperatura, come pure alla relazione $U = cNk_B T$ sovente utilizzata.

2.3.1 Teoria cinetica

La pressione di un gas ideale può essere quantificata come l'insieme degli urti delle particelle contro le pareti del recipiente entro il quale il gas è confinato. Il numero di urti è talmente grande che macroscopicamente si osserva unicamente una pressione d'insieme (pressione media).

Per quantificare questa pressione, consideriamo un cubo di lato L (volume $V = L^3$), e sia N il numero di particelle contenute nel cubo. La velocità di una particella *incidente* è data da $\vec{v}_p = \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, relativamente ad una base ortonormata $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ che scegliamo coincidente con i tre assi del cubo; si ha inoltre $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Vedi figura 2.3.

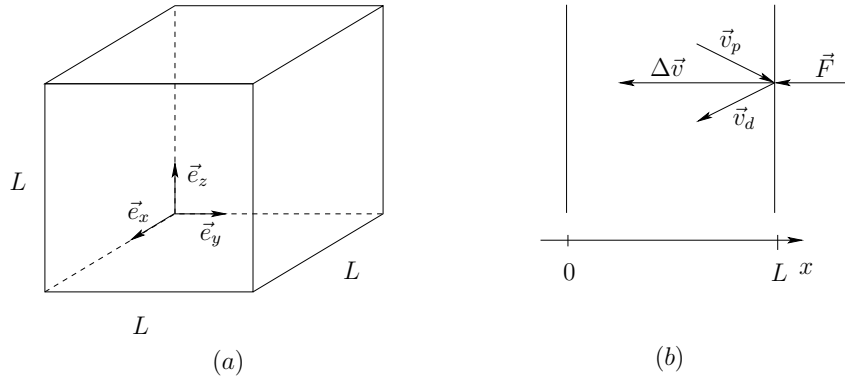


Figura 2.3: (a) Cubo di lato L in cui è contenuto il gas. (b) Cambiamento del vettore velocità $\Delta \vec{v} = \vec{v}_d - \vec{v}_p$ durante un urto elastico contro una delle pareti. La componente del vettore $\vec{v}_p$ rispetto al vettore di base $\vec{e}_x$ è v_x , mentre quella del vettore $\vec{v}_d$ è $-v_x$.

Osserviamo il moto di una particella nella direzione x , ad ogni urto (supposto elastico) con la parete perpendicolare la componente v_x della velocità cambia segno $v_x \rightarrow -v_x$ (ricordiamo che $v_x > 0$), la variazione della quantità di moto vale quindi

$$\Delta p_x = (p_x)_{\text{dopo urto}} - (p_x)_{\text{prima urto}} = m(-v_x) - mv_x = -2mv_x$$

Tra due collisioni successive sulla stessa faccia la particella percorre una distanza nella direzione x di $2L$ e il tempo necessario per questo percorso è (attenzione: la velocità delle particelle nella direzione x cambia solo di segno quando si hanno gli urti)

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

e dunque la variazione della quantità di moto per la particella nell'intervallo Δt vale

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = -m \frac{v_x^2}{L}$$

ora la causa della variazione della quantità di moto è la forza $\vec{F}$ esercitata dalla parete sulla particella, la cui componente rispetto al vettore di base $\vec{e}_x$ è $-F_x < 0$. Utilizzando la seconda legge di Newton, possiamo scrivere

$$-F_x = -m \frac{v_x^2}{L};$$

Per la terza legge di Newton la forza esercitata dalla particella sulla parete vale $-\vec{F}$ e la sua componente rispetto al vettore $\vec{e}_x$ vale

$$F_x = m \frac{v_x^2}{L}.$$

Se ora consideriamo le N particelle, avremo una forza esercitata *dal gas sulla parete* che vale

$$(F_x)_{tot} = \sum_{i=1}^N m \frac{(v_x)_i^2}{L} = \frac{m}{L} \sum_{i=1}^N (v_x)_i^2 = \frac{m}{L} N \langle v_x^2 \rangle$$

dove abbiamo utilizzato che il valore medio² di v_x^2 è dato da $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_x)_i^2$.

La pressione, data da $p = (F_x)_{tot}/L^2$, vale quindi

$$p = \frac{Nm}{V} \langle v_x^2 \rangle.$$

Ora le direzioni x , y e z sono equivalenti e quindi avremo $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ da cui³

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle \implies \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

ed infine si ha

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle \quad (2.1)$$

La pressione p è quindi direttamente proporzionale all'energia cinetica media $\langle E^{cin} \rangle$ delle particelle⁴.

L'espressione (2.1) può essere riscritta

$$pV = \frac{2}{3} N \langle E^{cin} \rangle$$

che va comparata con l'equazione dei gas ideali $pV = Nk_B T$, da cui possiamo scrivere

$$\langle E^{cin} \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (2.2)$$

Questo risultato importante ci permette di dare un'interpretazione diretta alla temperatura: ***la temperatura è una misura diretta dell'energia cinetica media delle particelle di un gas ideale.***

²In generale data una grandezza fisica A , di cui si conoscono N A_i valori possibili, il valore medio (notato $\langle A \rangle$) è dato da $\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i$.

³Qui si usa il fatto che il valor medio di $A + B$ è la somma dei valori medi: $\langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$.

⁴Attenzione si intende l'energia cinetica media di una singola particella, ma tutte le particelle hanno la stessa energia cinetica media.

2.3.2 Equipartizione dell'energia

Cominciamo con l'osservare che l'energia cinetica media totale è data da

$$\langle (E^{cin})_{tot} \rangle = N \langle E^{cin} \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$$

e per un gas ideale, ossia un gas la cui energia è puramente l'energia cinetica delle sue particelle (non vi sono contributi dovuti all'energia potenziale d'interazione tra le particelle poiché si suppone che le particelle non interagiscono tra loro), abbiamo

$$U = \langle (E^{cin})_{tot} \rangle \quad (2.3)$$

e ***possiamo interpretare quindi l'energia interna di un gas ideale come l'energia dovuta all'agitazione termica delle particelle*** (anche chiamata energia termica).

Un modo di interpretare fisicamente la relazione (2.2) è quello di osservare che le particelle di un gas ideale possono muoversi liberamente in tre direzioni indipendenti (le tre direzioni date dai vettori di base $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ e $\vec{e}_z$), fatto che si esprime dicendo che le particelle hanno tre *gradi di libertà*. Il numero di gradi di libertà di un PM è semplicemente il numero di variabili necessarie per descriverne l'energia meccanica⁵. Osserviamo che per una particella libera di muoversi senza subire forze interviene solo $\vec{p}$, poiché $E^{mec} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$.

Si può quindi dire che ogni grado di libertà “riceve”, in media, un'energia pari a $\frac{1}{2} k_B T$. Si parla di ***principio di equipartizione dell'energia***⁶, principio che afferma che ogni grado di libertà riceve in media la stessa energia $\frac{1}{2} k_B T$.

Per un sistema i cui microsistemi (nel caso precedente il gas composto da particelle) hanno ν gradi di libertà ogni microsistema dà un contributo all'energia del sistema pari a

$$\frac{\nu}{2} k_B T$$

e quindi per un sistema composto dal N microsistemi si avrà

$$U = \frac{\nu}{2} N k_B T \quad (2.4)$$

che è l'espressione (1.6) data per il gas ideale a condizione di identificare $c = \frac{\nu}{2}$.

Osserviamo, per concludere, che per un *solido* modellizzato come un insieme di atomi in un reticolo cristallino, e fissati elasticamente alla loro posizione di equilibrio (vedi figura 2.4), ogni atomo ha 6 gradi di libertà poiché l'energia meccanica di ogni singola particella si scrive

$$E^{mec} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + k(x^2 + y^2 + z^2) .$$

⁵Per essere precisi queste variabili devono intervenire nell'espressione dell'energia meccanica come dei quadrati (per esempio p_x^2 o y^2).

⁶Questo risultato non è valido in tutta generalità, ma solo ad alta temperatura.

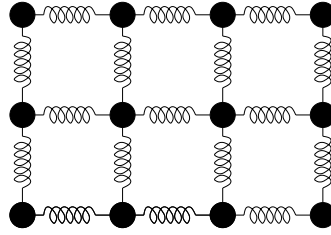


Figura 2.4: Solido modellizzato come atomi su un reticolo, ogni particella subisce una forza elastica ad opera delle particelle vicine.

Il teorema di equipartizione dell'energia ci dà quindi

$$U = 3Nk_B T. \quad (2.5)$$

Utilizzando il fatto che la contribuzione di energia cinetica vale $\langle (E^{cin})_{tot} \rangle = \frac{3}{2}Nk_B T$ possiamo concludere che $U - \langle (E^{cin})_{tot} \rangle = \frac{3}{2}Nk_B T$ è la contribuzione di energia potenziale media (dovuta alle forze elastiche) $\langle (E^{pot})_{tot} \rangle$ e responsabile della deformazione del reticolo cristallino. Vediamo quindi che *in questo caso l'energia interna si interpreta come una parte dovuta all'agitazione termica ed una dovuta all'energia di deformazione del cristallo.*

2.4 L'entropia di Boltzmann

In questa sezione ci occupiamo della connessione micro-macro concentrandoci sui concetti di entropia, irreversibilità e quindi le grandezze caratteristiche del secondo principio della termodinamica. Metteremo pure in luce alcuni aspetti epistemologici fondamentali per quel che riguarda l'evoluzione della fisica e in generale il modo di interpretare la Natura.

2.4.1 La termodinamica introduce la freccia del tempo

Il problema dell'irreversibilità verrà qui trattato partendo dal punto di vista della fisica classica. Per formulare il problema è utile ricordare alcuni fatti familiari: una zolletta che si scioglie nel caffè, una goccia di inchiostro che diffonde nell'acqua, un bicchiere che cade per terra e si frantuma in molti pezzi; ma anche l'oscillazione di un pendolo e il movimento di una palla da biliardo sono fenomeni pertinenti in un discorso sull'irreversibilità. Tutti questi fatti possono essere considerati come rappresentativi di due diverse categorie di fenomeni: i primi tre sono fenomeni irreversibili, mentre gli altri due sono fenomeni reversibili. Per comprendere la differenza essenziale proviamo a eseguire un esperimento ideale: giriamo un film che registra i diversi eventi e poi lo proiettiamo al contrario. Nel caso dei fenomeni irreversibili, si ottengono risultati strani e assurdi; per esempio, le molecole dello zucchero sciolto nel caffè si riaggregano e riformano la zolletta integra. Al contrario, nella seconda classe di esempi il film proiettato all'inverso non mostra nessuna peculiarità e non si può distinguere da quello originale (assumendo che l'attrito sia trascurabile e quindi che l'oscillazione del pendolo e il moto delle palle non vengano smorzati). In termini fisici, *nel caso dei fenomeni reversibili le equazioni della dinamica newtoniana sono invarianti*

per inversione temporale; in altre parole, se nelle equazioni che descrivono il fenomeno si cambia il segno alla variabile che rappresenta la velocità, tenendo fisso il segno della variabile posizione, e si lascia evolvere il sistema, dopo un certo tempo il sistema ritorna allo stato iniziale. È un'osservazione relativamente semplice: se si assume che i sistemi fisici seguano la dinamica newtoniana, allora questi sono reversibili.

QUESTA INVARIANZA PER INVERSIONE TEMPORALE, CONFERISCE ALLA DINAMICA NEWTONIANA LA PROPRIETÀ DI ESSERE UNA TEORIA DETERMINISTA IN CUI PASSATO E FUTURO SONO EQUIVALENTI.

Nella realtà, a livello macroscopico, si osservano quotidianamente **fenomeni che non sono evidentemente reversibili**; tra questi i fenomeni di diffusione (il fumo di una ciminiera che si diffonde nell'aria, o l'espansione libera di un gas in un cilindro) e i fenomeni di raffreddamento spontaneo (l'acqua che si raffredda dopo che è stata tolta dal fuoco). *Tutti questi fenomeni macroscopici hanno una caratteristica in comune: l'aumento dell'entropia; obbediscono cioè al secondo principio della termodinamica⁷. Dal secondo principio della termodinamica sembra quindi emergere una direzione privilegiata del tempo, definita in tutti i processi spontanei⁸ dall'aumento dell'entropia.*

L'IRREVERSIBILITÀ, ASSOCIATA AL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA CREA UNA ROTTURA CONCETTUALE CON LA MECCANICA NEWTONIANA. INFATTI DAL SECONDO PRINCIPIO CONSEGUO CHE PASSATO E FUTURO NON SONO EQUIVALENTI, È INTRODotta LA FRECCIA DEL TEMPO ORIENTATA DAL PASSATO AL FUTURO. LA TERMODINAMICA RIMANE COMUNQUE UNA TEORIA SOGGETTA AL PRINCIPIO DEL DETERMINISMO.

Questi due mondi, quello newtoniano reversibile e quello irreversibile dell'esperienza macroscopica, danno origine a un grosso problema. Nella visione scientifica ottocentesca e moderna i due mondi non si possono infatti separare, in quanto gli oggetti dell'esperienza macroscopica sono costituiti da atomi, cioè da oggetti microscopici che dovrebbero obbedire alle leggi di Newton. *Si tratta quindi di conciliare la visione microscopica, e quindi reversibile, formalizzata dalle leggi della dinamica di Newton, con quella macroscopica, manifestamente irreversibile, formalizzata dal secondo principio della termodinamica.*

2.4.2 Da impossibile ad improbabile: l'introduzione delle probabilità

Il problema summenzionato tenne lungamente occupato il grande fisico austriaco Ludwig Boltzmann (1844–1906) che, tra l'altro, fece il primo, e forse più importante, tentativo

⁷Parte (b).

⁸Quindi in un sistema isolato.

per trovare una base meccanica al secondo principio. Dopo un percorso lungo e difficile, Boltzmann si rese conto che la meccanica non basta e che ***per ridurre il secondo principio alla meccanica si rende necessaria l'introduzione delle probabilità.***

Per spiegare come la dinamica microscopica reversibile e quella macroscopica irreversibile vengono conciliate consideriamo l'esempio di un gas (= sistema) composto da N particelle, la cui energia è U e il cui volume è V . Il sistema è isolato.

Il gas può essere descritto *macroscopicamente*, in tal caso lo stato macroscopico ρ_{macro} è dato da

$$\rho_{\text{macro}} = (U, V, N)$$

ma lo stesso sistema può essere descritto *microscopicamente*, e in tal caso lo stato microscopico ρ_{micro} è dato da

$$\rho_{\text{micro}} = (\vec{x}_1, \vec{p}_1; \vec{x}_2, \vec{p}_2; \dots; \vec{x}_N, \vec{p}_N)$$

Introduciamo ora lo spazio delle fasi di ogni singola particella, esso sarà⁹

$$\Gamma_1 = \{(\vec{x}, \vec{p}) : \vec{x} \in \Lambda, \vec{p} \in \mathbb{R}^3\} = \Lambda \times \mathbb{R}^3$$

dove Λ è la regione accessibile (ossia in cui può trovarsi) alla particella, il cui volume è V . Lo stato ρ_{micro} è quindi un elemento di $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_1$ (N volte Γ_1).

Ora, dato uno stato microscopico ρ_{micro} esso determina in modo unico uno stato macroscopico, infatti la conoscenza di tutte le coppie $(\vec{x}, \vec{p})$ di ogni singola particella permette di trovare (U, V, N) ¹⁰. Al contrario, dato uno stato macroscopico ρ_{macro} , ***esistono diversi stati microscopici corrispondenti allo stato macroscopico dato***: quindi

1 stato microscopico $\rightarrow$ 1 stato macroscopico

1 stato macroscopico $\rightarrow$ **TANTI** stati microscopici = **TANTI** punti nello spazio delle fasi Γ

Dato uno stato macroscopico ρ_{macro} noteremo con $\Gamma(\rho_{\text{macro}}) \subset \Gamma$ *il sottoinsieme di Γ che contiene tutti gli stati microscopici che corrispondono allo stato macroscopico ρ_{macro}* , vedi figura 2.5.

Per *quantificare* il numero degli stati microscopici che corrispondono ad uno stato macroscopico dato utilizziamo il volume¹¹ di $\Gamma(\rho_{\text{macro}})$, notato $\Omega(\rho_{\text{macro}})$, vedi figura 2.6:

numero di stati microscopici corrispondenti allo stato macroscopico $\rho_{\text{macro}} = \Omega(\rho_{\text{macro}})$

⁹Il segno $\times$ indica il *prodotto cartesiano* di insiemi, esso è definito nel modo seguente: siano A e B due insiemi i cui elementi sono notati con le lettere a e b , l'insieme $A \times B$ è l'insieme delle coppie (a, b) :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Questa definizione si generalizza a N insiemi.

¹⁰ N è chiaramente conosciuto, conosciute le posizioni delle singole particelle si determina V e conosciute le quantità di moto e la posizione si determina l'energia U via la relazione $U = \langle (E^{\text{mec}})_{\text{tot}} \rangle$.

¹¹Attenzione: questo volume è un volume nello spazio delle fasi Γ , ossia in uno spazio "astratto", non è quindi da confondere con il volume occupato dalle particelle nello spazio fisico.

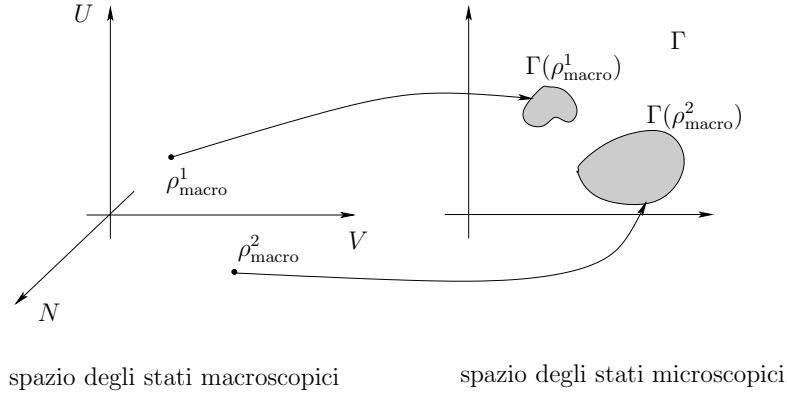


Figura 2.5: Lo spazio degli stati macroscopici per un sistema descritto dalle variabili (U, V, N) e lo spazio delle fasi Γ (o spazio degli stati microscopici). Ad ogni stato macroscopico ρ_{macro} corrispondono tanti stati microscopici ρ_{micro} , sono gli stati contenuti nelle aree ombreggiate $\Gamma(\rho_{\text{macro}})$.

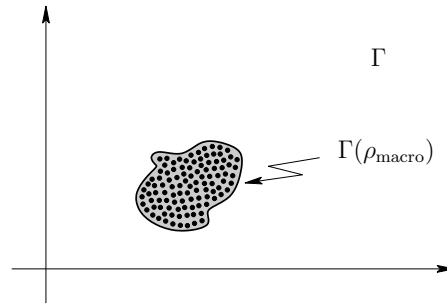


Figura 2.6: Lo spazio delle fasi Γ . Ad uno stato macroscopico ρ_{macro} corrispondono tanti stati microscopici ρ_{micro} (i puntini). L'area in grigio corrisponde al volume (qui a 2D l'area) $\Omega(\rho_{\text{macro}})$ di $\Gamma(\rho_{\text{macro}})$.

L'idea geniale di Boltzmann è di definire l'entropia di un sistema *macroscopico*, il cui stato è dato da ρ_{macro} ¹² come

$$S_B(\rho_{\text{macro}}) = k_B \ln \Omega(\rho_{\text{macro}}) \quad (2.6)$$

questa relazione è nota come **entropia di Boltzmann**.

Se definita per gli stati macroscopici all'equilibrio termodinamico, $S_B(\rho_{\text{macro}})$ coincide con l'entropia macroscopica definita in termodinamica¹³.

¹²Se lo stato macroscopico è (U, V, N) abbiamo la relazione fondamentale $S(U, V, N)$.

¹³Per essere precisi l'identificazione dell'entropia di Boltzmann coincide con l'entropia della termodinamica salvo un fattore che diventa trascurabile quando il sistema è sufficientemente grande.

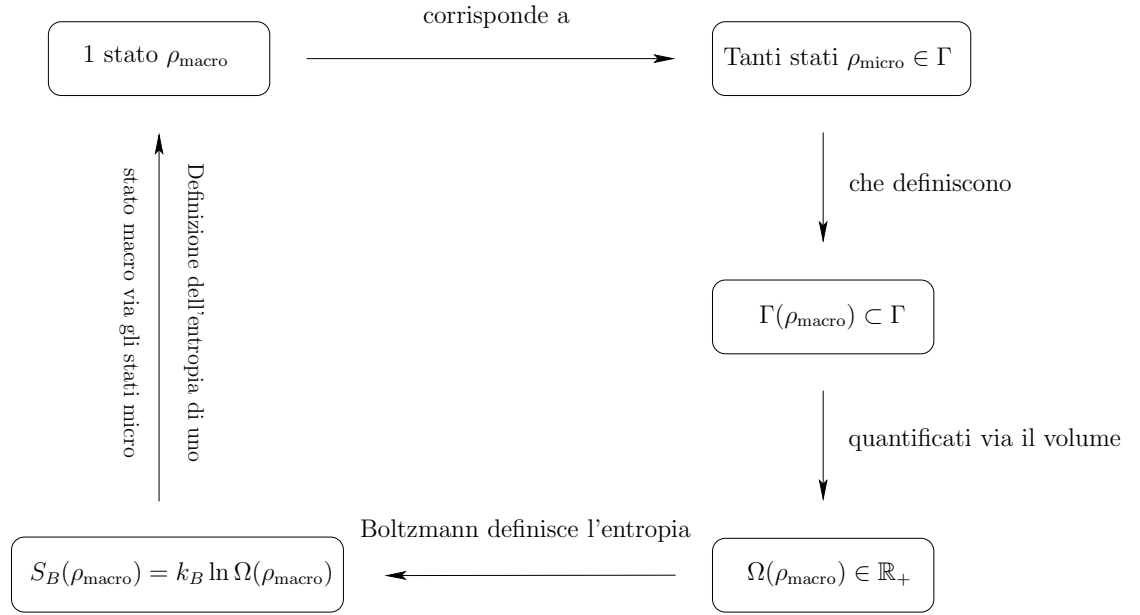


Figura 2.7: Costruzione dell'entropia di Boltzmann di uno stato macroscopico basandosi su di un'analisi microscopica.

L'ENTROPIA DI BOLTZMANN METTE IN RELAZIONE L'ENTROPIA DI UNO STATO MACROSCOPICO CON IL NUMERO DI STATI MICROSCOPICI CORRISPONDENTI ALLO STATO MACROSCOPICO IN QUESTIONE. SI HA QUINDI UNA CONNESSIONE TRA IL LIVELLO MICROSCOPICO ED IL LIVELLO MACROSCOPICO. INOLTRE, PER GLI STATI DI EQUILIBRIO L'ENTROPIA DI BOLTZMANN CORRISPONDE ALL'ENTROPIA TERMODINAMICA.

L'entropia di Boltzmann da quindi una giustificazione microscopica all'entropia termodinamica in relazione al secondo principio della termodinamica. Vediamo perché.

Guardiamo cosa accade allo spazio delle fasi Γ se il nostro gas, inizialmente contenuto nella metà sinistra (volume V_1) di un cilindro di volume $V_2 = 2V_1$, è lasciato libero di espandersi in tutto il cilindro togliendo la parete. Notiamo Λ_1 la regione in cui possono trovarsi le particelle del gas prima dell'espansione e Λ_2 quella accessibile alle particelle dopo la rimozione della parete. Come è descritto lo spazio fasi Γ prima e dopo aver tolto la parete?

$$\begin{aligned}
 \text{prima:} \quad \Gamma &= \underbrace{\Lambda_1 \times \mathbb{R}^3}_{=\Gamma_1} \times \dots \times \underbrace{\Lambda_1 \times \mathbb{R}^3}_{=\Gamma_1} = \Lambda_1^N \times \mathbb{R}^{3N} \\
 \text{dopo:} \quad \Gamma &= \underbrace{\Lambda_2 \times \mathbb{R}^3}_{=\Gamma_1} \times \dots \times \underbrace{\Lambda_2 \times \mathbb{R}^3}_{=\Gamma_1} = \Lambda_2^N \times \mathbb{R}^{3N}
 \end{aligned}$$

ma Λ_2 ha un volume doppio di Λ_1 , quindi il volume nello spazio delle fasi è diventato molto più grande, di un fattore 2^N (per ogni particella è moltiplicato per 2, avendo N particelle esso è moltiplicato per 2 un numero N di volte, che da 2^N), vedi figura 2.8.

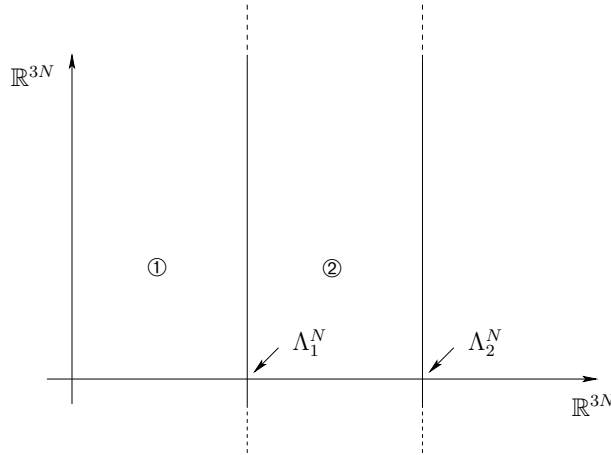


Figura 2.8: Lo spazio delle fasi Γ per un sistema di N particelle che si trovano nello spazio tridimensionale è un sottoinsieme dello spazio a $6N$ dimensioni $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$, in cui mettiamo *formalmente* in verticale l'insieme delle quantità di moto $(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$ ed in orizzontale l'insieme delle posizioni $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$. I punti nella parte di sinistra (①) possono essere degli stati microscopici possibili sia prima sia dopo la rimozione della parete, mentre i punti nella parte di destra (②) possono essere degli stati microscopici possibili solo dopo la rimozione della parete.

A livello macroscopico lo stato (U, V, N) prima e dopo la rimozione della parete potrà solo differire della variabile volume, infatti essendo un sistema isolato U e N restano costanti. Lo stato macroscopico, dopo la rimozione della parete, sarà quindi caratterizzato da (U, V, N) con $V_1 \leq V \leq V_2$.

Prima della rimozione della parete abbiamo uno stato di equilibrio, macroscopicamente dato da (U, V_1, N) la cui entropia di Boltzmann (che è uguale all'entropia termodinamica) vale

$$S_B(U, V_1, N) = k_B \ln \Omega(U, V_1, N)$$

ed è massima compatibilmente con i vincoli di U e N fissati (il gas occupa tutto il volume V_1).

Boltzmann propose di utilizzare la definizione (2.6) anche per degli *stati fuori equilibrio*¹⁴.

Immediatamente dopo la rimozione della parete l'entropia di Boltzmann è sempre data da

$$S_B(U, V_1, N) = k_B \ln \Omega(U, V_1, N)$$

ma ora lo stato (U, V_1, N) non è più uno stato di equilibrio ed esso evolverà verso un nuovo stato di equilibrio. Quale sarà il nuovo stato di equilibrio?

Partendo dallo stato fuori equilibrio (U, V_1, N) il gas avrà tendenza ad espandersi e quindi la regione che occuperà passerà gradualmente da Λ_1 a Λ_2 , durante questo processo $\Omega(U, V, N)$ continuerà a crescere, fino a quando non sarà raggiunta una nuova situazione

¹⁴Attenzione questo è possibile farlo rigorosamente solo in determinate condizioni.

di equilibrio, che corrisponde ad avere il gas espando in tutto Λ_2 . Ma se $\Omega(U, V, N)$ cresce, allora l'entropia di Boltzmann cresce, e ciò fino a raggiungere lo stato (U, V_2, N) che è lo *stato macroscopico al quale corrispondono più stati microscopici*¹⁵. **Lo stato di equilibrio finale è lo stato che massimizza l'entropia di Boltzmann.**

Abbiamo

$$\Omega(U, V_2, N) = 2^N \Omega(U, V_1, N)$$

che ci permette di calcolare la differenza di entropia di Boltzmann; otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta S_B &= k_B \ln \Omega(U, V_2, N) - k_B \ln \Omega(U, V_1, N) = k_B \ln \frac{\Omega(U, V_2, N)}{\Omega(U, V_1, N)} \\ &= k_B \ln 2^N = N k_B \ln 2 \end{aligned}$$

Sapendo che l'entropia termodinamica e di Boltzmann coincidono negli stati iniziali e finali, e il fatto che per l'entropia termodinamica sappiamo (per un gas ideale) che $\Delta S = N k_B \ln 2$, possiamo concludere che l'entropia termodinamica dello stato di equilibrio finale è massima (ed uguale all'entropia di Boltzmann); come ci si aspetta dal secondo principio della termodinamica, parte (b).

IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA, PARTE (B), PUÒ ESSERE INTERPRETATO MICROSCOPICAMENTE SULLA BASE DEL FATTO CHE LO STATO DI EQUILIBRIO MACROSCOPICO È QUELLO AL QUALE CORRISPONDE IL MAGGIOR NUMERO DI STATI MICROSCOPICI. INOLTRE, DURANTE IL PROCESSO L'ENTROPIA AUMENTA.

Ma veniamo agli aspetti probabilistici. Einstein inverte la relazione $S_B = k_B \ln \Omega$ e introduce la probabilità di osservare lo stato macroscopico (U, V, N) nel modo seguente

$$\text{Prob}(U, V, N) \propto e^{\frac{1}{k_B} S_B(U, V, N)} \quad (2.7)$$

Sapendo che **all'equilibrio** $S_B = S$, allora possiamo concludere che **lo stato più probabile** (ossia con probabilità maggiore di essere osservato), **è quello che ha entropia massima**. Vediamo quindi che il secondo principio, parte (b), che prevede che gli stati di equilibrio sono gli stati di entropia massima, si interpreta dicendo che lo stato macroscopico più probabile all'equilibrio è lo stato al quale corrisponde il maggior numero di stati microscopici.

Riprendendo l'esempio del gas che si espande diremo che lo stato più probabile è quello in cui il gas è espanso in tutto il cilindro (che è appunto lo stato di entropia massima), ciò non vuol dire che la configurazione in cui tutte le particelle rimangono nella parte sinistra del cilindro sia impossibile, ma semplicemente è una configurazione poco probabile, infatti abbiamo

$$\frac{\text{Prob}(\text{gas a sinistra})}{\text{Prob}(\text{gas a espanso})} = \frac{\Omega(U, V_1, N)}{\Omega(U, V_2, N)} = \frac{1}{2^N}$$

¹⁵Infatti per questo stato macroscopico $\Gamma(S, V_2, N) \subset \Gamma$ è quello per il quale si ha Λ_2 nella descrizione della regione occupata dal gas.

da cui

$$\text{Prob}(\text{gas a sinistra}) = \frac{1}{2^N} \text{Prob}(\text{gas a espanso})$$

ossia la probabilità che il gas resti tutto a sinistra è 2^N più piccola rispetto alla probabilità che il gas si espande in tutto il volume accensibile, se abbiamo $N = 10^{23}$ particelle allora $2^N = 2^{10^{23}}$ è grandissimo.

Se ora consideriamo il gas espanso in tutto il pistone, ossia uno stato di entropia grande (massima), e consideriamo l'evoluzione del gas verso uno stato in cui tutto il gas è a sinistra, quindi uno stato di entropia minore rispetto allo stato di partenza, vediamo che questa evoluzione è fortemente improbabile. Il principio di massima entropia nell'evoluzione di un fenomeno fisico (per un sistema isolato) è quindi a questo punto della discussione non una certezza, ma semplicemente qualcosa di fortemente probabile.

CONSIDERANDO LA PROBABILITÀ ASSOCIATA AD UNO STATO MACROSCOPICO, IL SECONDO PRINCIPIO SI INTERPRETA DICENDO CHE LO STATO MACROSCOPICO CHE SI OTTIENE ALL'EQUILIBRIO È IL PIÙ PROBABILE. INOLTRE, DURANTE UN PROCESSO SI HA UN'EVOLUZIONE DA STATI MENO PROBABILI A STATI DI GRANDE PROBABILITÀ. UN PROCESSO IRREVERSIBILE È QUINDI UN PROCESSO CHE HA UNA PICCOLISSIMA PROBABILITÀ DI ACCADERE.

Concludiamo parafrasando l'affermazione di Gibbs citata da Boltzmann nel suo libro *Lectures on gas theory II*: “***L'impossibilità di una diminuzione dell'entropia durante l'evoluzione di un sistema isolato sembra essere ridotta ad un'improbabilità***”.

Capitolo 3

Meccanica

3.1 Introduzione

La **meccanica** è lo studio del moto – e del riposo – di sistemi materiali caratterizzati da osservabili spazio-temporali. Per studiare il moto della Terra attorno al Sole è ad esempio possibile osservarne la posizione e la velocità ad un certo istante; posizione e velocità sono esempi di osservabili spazio-temporali.

La **cinematica** è la parte della meccanica che si occupa dello studio dei moti (o movimenti) osservati *indipendentemente* dalle cause che li provocano. La **dinamica** s'interessa invece alle *cause* del moto.

I sistemi studiati dalla meccanica sono chiamati **sistemi meccanici** e sono definiti come un insieme di punti materiali sottomessi a delle forze. Il **punto materiale**¹ è una comoda astrazione per descrivere il moto:

- è un oggetto la cui quantità di materia resta costante,
- resta identificabile durante il moto,
- *le sue dimensioni sono trascurabili se comparate alle distanze percorse.*

Vediamo quindi che la nozione di “punto” non è intesa nel senso matematico del termine come un oggetto senza dimensione, ma nel senso fisico, cioè come un oggetto che può essere idealizzato come un punto per essere studiato. Per esempio, possiamo parlare di punto materiale anche per oggetti molto grandi come la Terra e il Sole e non solo per oggetti piccoli come una palla da tennis o una biglia.

Per studiare la cinematica, dopo aver introdotto il concetto fondamentale di sistema di riferimento, abbiamo visto che sono necessari i concetti di posizione, velocità e accelerazione. D'altra parte abbiamo visto che per discutere le cause del moto sono necessari altri concetti quali la *massa*, grandezza estensiva associata al sistema studiato, la *forza*, grandezza che descrive l'azione dell'*esterno* sul sistema e la *quantità di moto*, grandezza estensiva, osservabile che ci permette di caratterizzare lo stato di moto di un

¹Abbrevieremo a volte punto materiale con PM.

corpo. Dal punto di vista degli aspetti energetici le grandezze fondamentali sono quelle di *energia cinetica*, *energia potenziale* ed *energia meccanica*, come pure il concetto di *lavoro*.

In questo capitolo si ripercorrono i temi già trattati nel corso di prima liceo, completando la trattazione della meccanica sia sul piano formale sia qua e là sul piano di concetti.

3.2 Sistema, osservabile, stato

Come nella termodinamica anche per la meccanica i concetti fondamentali della teoria sono quelli di sistema, osservabile e stato, inoltre come vedremo in meccanica sarà interessante anche conoscere l'evoluzione temporale dello stato. Non ripetiamo questa struttura e le definizioni di base, ma mostriamo degli esempi.

Esempio

- Sistema: una particella che si muove nello spazio a tre dimensioni su cui agisce la forza peso.
- Osservabili: posizione (grandezza vettoriale), velocità (grandezza vettoriale), energia cinetica (grandezza scalare).
- Stato: come vedremo, in dinamica lo stato di un punto materiale è dato dalla conoscenza della posizione $\vec{x}$ e della quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$, conoscendo la posizione all'istante t , $\vec{x}(t)$, e la quantità di moto all'istante t , $\vec{p}(t)$, possiamo determinare il valore di tutte le altre osservabili. Per esempio l'osservabile velocità all'istante t vale $\vec{v}(t) = \vec{p}(t)/m$.

Osserviamo pure che quelle grandezze fisiche inerenti il sistema, ma che *non cambiano* durante l'evoluzione temporale, non rientrano nella descrizione dello stato, ma sono considerate come delle **proprietà del sistema**. Ossia sono delle informazioni che l'osservatore deve possedere, ma che sono conosciute una volta per tutte, a differenza delle informazioni che rappresentano lo stato, che invece cambiano (in generale) da un istante all'altro.

Esempio (continuazione)

La massa di un punto materiale (=sistema) è una proprietà del sistema e non si trova quindi nella descrizione dello stato, benché è un'informazione che l'osservatore deve possedere.

Riassumendo. L'osservatore per studiare un qualsiasi fenomeno fisico deve:

- dapprima scegliere il **sistema** che desidera studiare,
- poi decidere cosa studiare relativamente al sistema, ossia scegliere delle **osservabili**,
- ed infine deve possedere delle informazioni sul sistema senza delle quali lo studio è impossibile, si tratta quindi di conoscere *ad ogni istante* lo **stato** (e le proprietà del sistema).

Lo stato di un punto materiale in cinematica.

Possiamo illustrare con un esempio semplice come è caratterizzato lo stato di un punto materiale *in cinematica*. Supponiamo data una forza costante $\vec{F}$ che agisce sul PM, allora sappiamo che l'accelerazione del PM, data la sua massa (inerziale) m , vale $\vec{a}_0 = \vec{F}/m$ ed è pure costante. Il PM ha quindi un moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA). Quali informazioni dobbiamo conoscere sul PM per caratterizzarlo in modo univoco ed ad ogni istante t ?

Per rispondere a questa domanda consideriamo le equazioni dell'evoluzione temporale del PM per un MRUA

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0) \\ \vec{a}(t) = \vec{a}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Da queste equazioni vediamo che l'informazione necessaria per caratterizzare il PM ad un qualsiasi istante t è la conoscenza della posizione $\vec{x}(t)$, della velocità $\vec{v}(t)$ e dell'accelerazione $\vec{a}(t)$. L'accelerazione $\vec{a}(t)$ è direttamente conosciuta tramite la conoscenza della forza esterna che agisce sul PM e la massa (=proprietà del sistema), poiché si ha sempre² $\vec{F} = m\vec{a}$. Visto che lo stato riguarda unicamente il sistema, e non l'interazione esterno-sistema, l'accelerazione (e la forza) non fa parte dello stato. Restano quindi, come informazioni riguardanti unicamente il sistema, la posizione $\vec{x}(t)$ e la velocità $\vec{v}(t)$ ³.

Osserviamo, che all'istante t_0 l'informazione sul sistema è data dalla conoscenza della sua posizione $\vec{x}_0$ e la sua velocità $\vec{v}_0$. Inoltre conosciuto lo stato all'istante t_0 , ossia la coppia $(\vec{x}_0, \vec{v}_0)$ e l'interazione con l'esterno, ossia la forza $\vec{F}$, è possibile conoscere lo stato ad un qualsiasi istante t , ossia la coppia $(\vec{x}(t), \vec{v}(t))$.

In conclusione lo stato di un PM in cinematica è caratterizzato dall'informazione sulla *posizione* $\vec{x}$ e la *velocità* $\vec{v}$.

Moto uniformemente accelerato

Nel caso di forze costanti, il *moto* è ***uniformemente accelerato*** e l'evoluzione temporale, in cinematica, è data da

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0) \end{cases} \quad (3.2)$$

Nei casi concreti queste equazioni sono vettoriali e ***ogni singola equazione va scomposta secondo il sistema di coordinate introdotto***.

²In dinamica newtoniana del PM.

³Osserviamo che nell'espressione della velocità del PM appare l'accelerazione, ciò non implica che la velocità riguarda anche l'esterno, ma che la modifica della velocità è ad opera di un'azione dall'esterno (la forza $\vec{F} = m\vec{a}$), mentre nel caso dell'accelerazione abbiamo sempre l'uguaglianza $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

3.3 La quantità di moto

La discussione precedente mostra che la conoscenza della posizione $\vec{x}$ di un PM e dell'istante t al quale esso si trova in quel luogo non è sufficiente per determinare univocamente lo stato del PM e la sua evoluzione temporale. Bisogna quindi introdurre una grandezza supplementare associata al movimento e abbiamo visto che, *in cinematica*, possiamo scegliere la velocità $\vec{v}$. Quest'ultima però è una grandezza puramente geometrica che non contiene nessun elemento fisico e non può quindi essere di grande utilità per un'analisi della dinamica. Infatti due PM con la stessa velocità, da un punto di vista dinamico, sono ben diversi: infatti per modificare (nello stesso tempo) la velocità di un PM con una grande massa è necessaria una forza maggiore rispetto a quella per modificare la velocità di un PM con una massa più piccola. Vediamo qui che, nel quadro della dinamica, intervengono i concetti di massa e forza.

Dobbiamo quindi andare alla ricerca di una grandezza associata al movimento che, con la posizione $\vec{x}$, possa caratterizzare lo stato di un PM da un punto di vista dinamico. Quello che sappiamo è che un oggetto in movimento ha la possibilità di provocare il movimento di un altro oggetto⁴, ciò vuol dire che ha la possibilità di *trasferirgli* una parte del suo movimento. **Vorremmo** associare a un corpo in movimento una grandezza *estensiva* e *conservata*, che può essere trasferita durante un urto e che chiamiamo quantità di moto. Come vedremo più avanti il fatto di conoscere delle grandezze estensive e conservate è di particolare interesse per la risoluzione, in modo semplice, di svariate situazioni.

Per arrivare alla definizione precisa della quantità di moto, nel quadro della meccanica newtoniana, consideriamo un urto “elastico” (elastico nel senso intuitivo) tra due carrellini A e B (di sostanze differenti, per esempio uno di ferro e l'altro di rame) che si spostano su un binario ad aria rettilineo. La massa di B è costante, mentre quella di A è modificata nel corso delle diverse esperienze, vedi figura 3.1.

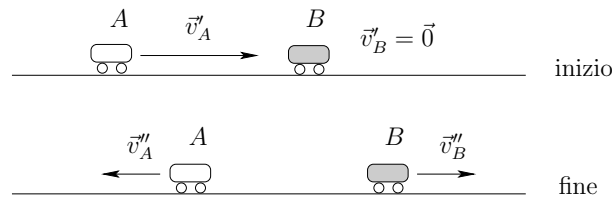


Figura 3.1: Urti elastici: m_B fissa e m_A variabile.

L'esperienza mostra che per ogni velocità iniziale di A c'è un trasferimento integrale della “quantità di moto” se e solo se⁵ $m_A = m_B$, ciò vuol dire che se e solo se $m_A = m_B$ il carrellino A si ferma dopo l'urto e B parte con la velocità iniziale di A . D'altra parte per due carrellini A di stessa massa e stessa velocità, ma di sostanze differenti si ottengono gli

⁴Pensate allo scontro tra un carrellino fermo su un binario ad aria ed uno in moto.

⁵Le masse qui sono le masse inerziali, ma visto il principio di equivalenza parliamo semplicemente di massa.

stessi risultati. Quindi *questa “quantità di moto” dipende solo dalla massa e dalla velocità.*

D'altra parte sappiamo tutti che è più difficile fermare un camion carico che lo stesso camion vuoto che viaggia alla stessa velocità. Sappiamo pure che è più difficile fermare un'auto che viaggia a grande velocità piuttosto che la stessa auto che viaggia lentamente. Vediamo quindi che questa “quantità di moto” aumenta se la massa aumenta o se la velocità aumenta. *Se $\vec{v} = \vec{0}$ allora la quantità di moto è nulla.* Ma quale è la relazione precisa tra la quantità di moto, la massa e la velocità? Per questo ci basiamo sulle considerazioni empiriche seguenti.

- Consideriamo un corpo A che si muove verso un corpo $B = A$ fermo (vedi figura 3.2). Dopo l'urto A resta agganciato a B e proseguono assieme. Misurando il valore delle velocità iniziale e finale di A osserviamo che esso è dimezzato (vedi figura 3.3).

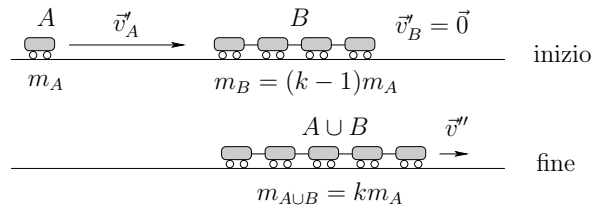


Figura 3.2: Durante l'urto la quantità di moto del corpo A si divide per un fattore k , la misura rileva che anche la velocità è divisa per lo stesso fattore. Abbiamo $\vec{v}'' = \vec{v}_A'' = \vec{v}_B''$.

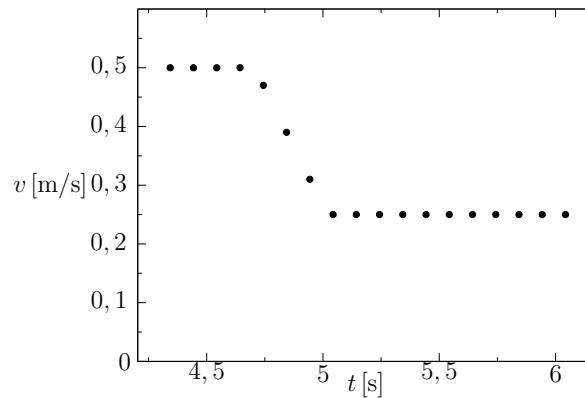


Figura 3.3: Dati empirici della velocità in un urto con aggancio tra due slitte identiche di cui una ferma.

Prima dell'urto la quantità di moto del sistema $A \cup B$ è quella di A (B è fermo), per estensività. Visto che la quantità di moto è conservata, per estensività ed il fatto che dopo l'urto $v_A'' = v_B''$ e $m_A = m_B$, essa si distribuisce equamente tra A e B dopo l'urto: A ha esattamente la metà della quantità di moto iniziale.

Abbiamo quindi (notando $p(m, v)$ l'intensità della quantità di moto come funzione della massa m e del valore della velocità v)

$$p(m_A, v_A') \stackrel{cons}{=} p(2m_A, v_A'/2) \stackrel{est}{=} 2p(m_A, v_A'/2)$$

- Possiamo ripetere l'esperimento con un corpo A che si muove verso $B = A \cup A$ ed otteniamo che il valore della velocità si divide per tre (vedi figura 3.4) come pure l'intensità della quantità di moto.

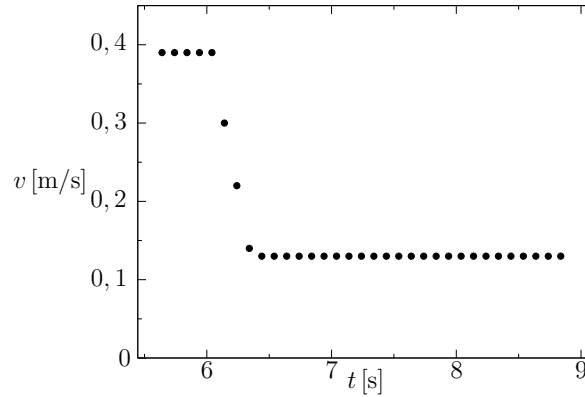


Figura 3.4: Dati empirici della velocità in un urto con aggancio tra tre slitte identiche di cui due ferme.

- Quindi in generale ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$p(m_A, v'_A) \stackrel{cons}{=} p(km_A, v'_A/k) \stackrel{est}{=} kp(m_A, v'_A/k) \quad (3.3)$$

Dall'uguaglianza

$$p(m_A, v'_A) = kp(m_A, v'_A/k)$$

possiamo concludere che se la velocità (di A) è divisa per un fattore k allora anche la quantità di moto (di A) è divisa per lo stesso fattore: l'intensità della quantità di moto è dunque direttamente proporzionale⁶ al valore della velocità

$$p \propto v \quad m = \text{costante} .$$

Dall'uguaglianza (che segue da (3.3) ponendo $v''_A = v'_A/k$)

$$p(km_A, v''_A) = kp(m_A, v''_A)$$

possiamo concludere che se la massa (di A) è moltiplicata per un fattore k allora anche la quantità di moto (di A) è moltiplicata per lo stesso fattore: l'intensità della quantità di moto è dunque direttamente proporzionale alla massa

$$p \propto m \quad v = \text{costante} .$$

Questa conclusione può essere dedotta considerando due corpi A e $B = A \cup A$ che si muovono alla stessa velocità. Visto che B è due volte A ($B = A \cup A$) per estensività la quantità di moto di B è il doppio di quella di A e così via.

Possiamo quindi concludere che l'intensità della quantità di moto è direttamente proporzionale al prodotto mv e le esperienze mostrano che il coefficiente di proporzionalità vale 1, dunque

$$p = mv .$$

⁶Il simbolo $\propto$ significa direttamente proporzionale.

In conclusione la **quantità di moto** è la grandezza *estensiva, conservata, vettoriale* data da

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.4)$$

Osservazione fondamentale Oggigiorno si è realizzato l'importanza fondamentale del concetto di quantità di moto. Si *postula* che ogni sistema è caratterizzato da una grandezza vettoriale, $\vec{p}$, estensiva, conservata, chiamata *quantità di moto*. In questo contesto moderno, la relazione (3.4) tra la quantità di moto e la velocità del PM non è una definizione, ma una **legge della meccanica newtoniana**⁷.

Abbiamo quindi trovato una grandezza estensiva e conservata associata allo stato di moto del PM, essa servirà per caratterizzare, assieme alla posizione $\vec{x}$ lo stato del sistema. Se restringiamo (come è il caso qui) il quadro di analisi alla meccanica newtoniana vediamo che la quantità di moto e la velocità sono direttamente proporzionali e quindi conoscendo la massa possiamo passare da $\vec{p}$ a $\vec{v}$, da cui è ancora ammesso caratterizzare lo stato del sistema con la velocità, a patto però di interpretarla come variabile indipendente e non come variazione istantanea della posizione⁸.

In conclusione, **in dinamica lo stato di un punto materiale è dato dalla coppia**

$$(\vec{x}, \vec{p}) \quad (\text{posizione, quantità di moto}).$$

3.4 La Prima legge di Newton

Nella sezione precedente abbiamo determinato una grandezza estensiva e conservata, essa è legata alla massa inerziale m e alla velocità $\vec{v}$ dalla relazione $\vec{p} = m\vec{v}$. Ma cosa è la velocità che appare nella relazione precedente? Nella cinematica abbiamo visto che non ha senso parlare di moto, e men che meno di velocità, se prima non stabiliamo il punto di vista, chiamato sistema di riferimento, dal quale decidiamo di studiare e descrivere il moto.

Discutiamo brevemente questo aspetto di fondamentale importanza. Se descriviamo il moto di oggetti nello spazio tridimensionale, un **sistema di riferimento** $\mathcal{R}$ è un insieme di almeno quattro punti non complanari⁹ *immobili* gli uni rispetto agli altri.

Osserviamo che *la nozione di movimento è intrinsecamente legata a quella di sistema di riferimento*. Gli alberi a lato di una strada, ad esempio, sembrano muoversi incontro a chi guida ma appaiono fermi per l'autostoppista seduto sul ciglio. Allo stesso modo il cruscotto della macchina è fermo per l'autista ma è in moto per l'autostoppista. Sono

⁷Questa legge sarà modificata in relatività.

⁸Ciò che va anche fatto in cinematica. Infatti lo stato di un sistema ad un dato istante è come una "fotografia". Se si interpreta la velocità come variazione istantanea è necessario avere due "fotografie" per definirla (infatti la si calcola come pendenza della retta tangente al grafico $x(t)$ e per definire la retta tangente abbiamo bisogno di due istanti che si avvicinano sempre più, quindi due "fotografie" sempre più vicine).

⁹Ossia che non si trovano tutti su di un piano.

proprietà così note e comuni del mondo in cui viviamo che quasi non ci facciamo caso. Vediamo che possiamo definire due sistemi di riferimento differenti per lo studio del moto di un oggetto (gli alberi e il cruscotto): il primo sistema di riferimento è la Terra, il secondo che possiamo scegliere è la macchina; entrambi sono dei sistemi di riferimento possibili, e la descrizione del moto è differente da questi due punti di vista.

La scelta dei sistemi di riferimento adatti per considerare quanto sviluppato nella sezione precedente è contenuto nella Prima legge di Newton, o **principio di inerzia**, di cui diamo prima la formulazione di Newton: “Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, salvo che sia costretto a mutare quello stato da forze”.

Questa legge non enuncia unicamente qualcosa sul moto dei corpi, ma ci *definisce* pure quali sistemi di riferimento sono ammissibili e possono essere utilizzati per descrivere la meccanica. Questi sistemi di riferimento particolari, chiamati **sistemi di riferimento inerziali**, sono tali che *rispetto ad essi* un corpo sufficientemente lontano da tutti gli altri (sistema isolato) possiede un *moto rettilineo ed uniforme*.

Quindi, se ci troviamo in un sistema di riferimento $\mathcal{R}$, e vogliamo sapere se è inerziale, dobbiamo guardare il moto di un oggetto sul quale non agiscono forze, se osserviamo un MRU allora possiamo concludere che ci troviamo in un sistema di riferimento inerziale (vedi figura 3.5).

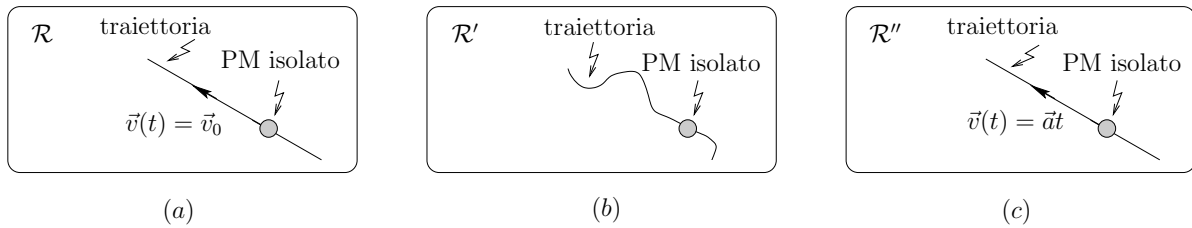


Figura 3.5: (a) Sistema (= PM) *isolato* con traiettoria rettilinea, velocità costante: $\mathcal{R}$ è inerziale. (b) $\mathcal{R}'$ non è inerziale poiché la traiettoria del PM *isolato* non è rettilinea. (c) $\mathcal{R}''$ non è inerziale poiché la velocità del PM *isolato* non è costante.

Osserviamo che la ricerca di un sistema di riferimento inerziale non è evidente. Ma una volta conosciutone uno poi trovare gli altri è facile. Sia quindi $\mathcal{R}$ un sistema di riferimento inerziale, allora rispetto ad esso un corpo che non subisce forze ha un MRU. Ora, il moto sarà anche un MRU rispetto a tutti i sistemi di riferimento che hanno a loro volta un MRU rispetto ad $\mathcal{R}$. Infatti se $\vec{v})_{\mathcal{R}}$ è la velocità del corpo rispetto ad $\mathcal{R}$ e $\vec{u}$ è la velocità di un sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ rispetto ad $\mathcal{R}$, allora la velocità $\vec{v})_{\mathcal{R}'}$ del corpo rispetto ad $\mathcal{R}'$ è

$$\vec{v})_{\mathcal{R}'} = \vec{v})_{\mathcal{R}} - \vec{u}$$

che è ancora costante¹⁰ (vedi figura 3.6).

¹⁰Se le velocità $\vec{v})_{\mathcal{R}}$ e $\vec{u}$ non hanno stessa direzione allora gli osservatori in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ vedranno delle traiettorie che non sono parallele, ma ciò non importa, infatti l'essenziale è che le velocità siano costanti

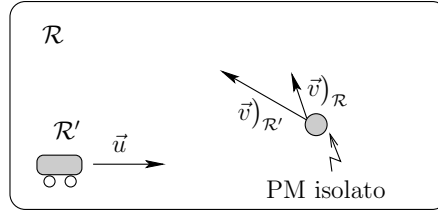


Figura 3.6: Dato $\mathcal{R}$ inerziale, se $\vec{u}$ è costante allora $\mathcal{R}'$ è pure inerziale.

Quindi *tutti i sistemi di riferimento che hanno un moto rettilineo ed uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{R}$ sono anch'essi sistemi di riferimento inerziali.*

Per tutti gli altri possibili moti di $\mathcal{R}'$ rispetto ad $\mathcal{R}$ il moto del corpo *non* è un MRU:

- se $\mathcal{R}'$ ha un MRUA rispetto ad $\mathcal{R}$ allora $\vec{u}$ non è costante e quindi neanche $\vec{v}_{\mathcal{R}'}$,
- se $\mathcal{R}'$ ha un moto circolare (o più in generale un moto curvilineo) rispetto ad $\mathcal{R}$, vedi figura 3.7, allora il moto del corpo non è sicuramente rettilineo. Infatti in questo caso (anche se la velocità di rotazione è costante) $\vec{v}_{\mathcal{R}'}$ cambia continuamente direzione e non è quindi un vettore costante¹¹.

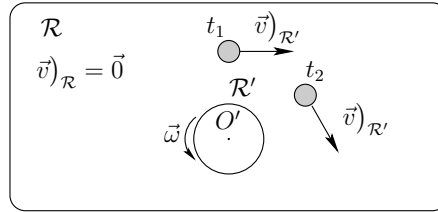


Figura 3.7: $\mathcal{R}$ è inerziale, il PM è isolato e rispetto ad $\mathcal{R}$ è fermo. $\mathcal{R}'$ è in rotazione a velocità di rotazione costante $\vec{\omega}$ e le origini di $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ sono identiche ($O = O'$). Per due istanti $t_1 < t_2$ diversi la velocità del PM rispetto a $\mathcal{R}'$ non è uguale: $\mathcal{R}'$ non è inerziale.

In pratica in molti casi si sceglie un sistema di riferimento “quasi inerziale”, ossia un sistema di riferimento che in prima approssimazione è un sistema di riferimento inerziale. In prima approssimazione è possibile scegliere la Terra (**sistema di riferimento terrestre**) come sistema di riferimento inerziale (o meglio “quasi inerziale”) per descrivere e spigare molti fenomeni, e le osservazioni sono generalmente in accordo con le predizioni teoriche. In questa approssimazione un punto materiale fermo sulla superficie della Terra ha un'accelerazione nulla.

È possibile scegliere un sistema di riferimento “più inerziale”, chiamato **sistema di**

per entrambi; anche se hanno direzioni diverse tra loro, sia da $\mathcal{R}$ sia da $\mathcal{R}'$ si osserverà un moto rettilineo a velocità costante.

¹¹Complemento: si può dimostrare che, se le origini nei due sistemi di riferimento coincidono ($O = O'$),

$$\vec{v}_{\mathcal{R}'} = \vec{v}_{\mathcal{R}} - \vec{\omega} \wedge \vec{x}$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità di rotazione di $\mathcal{R}'$ rispetto a $\mathcal{R}$.

riferimento geocentrico definito dal centro della Terra e tre stelle molto lontane (chiamate stelle fisse), rispetto a questo sistema di riferimento la Terra ruota attorno all'asse dei poli. Rispetto al sistema di riferimento geocentrico un punto immobile sulla superficie della Terra ha un'accelerazione di $3.4 \cdot 10^{-2} \cos \lambda \text{ m/s}^2$, dove λ è la latitudine. Si può continuare così e trovare dei sistemi di riferimento “sempre più inerziali”. Sperimentalmente si dirà che un sistema di riferimento è inerziale se le leggi di Newton sono verificate nel limite della precisione degli apparecchi di misura a disposizione.

Ecco la formulazione moderna della Prima legge di Newton.

Prima legge di Newton: La quantità di moto $\vec{p}$ di un punto materiale resta costante durante l'evoluzione temporale se e solo se la risultante delle forze che agiscono su di lui è uguale a zero:

$$\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = \vec{0} \implies \vec{p} = \text{costante} \implies \vec{v} = \text{costante} \quad (3.5)$$

dove l'ultima implicazione segue da $\vec{p} = m\vec{v}$ valevole in meccanica newtoniana (m è la massa inerziale). Questa legge *definisce* i sistemi di riferimento inerziali.

Possiamo ora dire che, dopo aver scelto un sistema di riferimento inerziale, se sappiamo che il sistema è isolato ($\vec{F} = \vec{0}$) allora $\vec{p}$ è costante durante l'evoluzione temporale, ciò che equivale a dire che $\vec{p}$ è una grandezza conservata. Ciò è particolarmente utile per studiare svariate situazioni, quindi *ogni volta che il sistema è isolato potremo sfruttare il fatto che, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, $\vec{p}(t) = \vec{p}(t_0)$ per ogni istante t .*

3.5 La Terza legge di Newton

La Terza legge di Newton, anche conosciuta come **principio di azione–reazione**, è introdotta da Newton nel seguente modo: “L'azione è sempre uguale e contraria alla reazione: cioè le mutue azioni di due corpi sono sempre uguali e dirette in senso opposto”.

Terza legge di Newton: Se $\vec{F}^{1 \rightarrow 2}$ rappresenta la forza esercitata dal sistema 1 sul sistema 2, allora

$$\vec{F}^{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}^{2 \rightarrow 1} . \quad (3.6)$$

Osserviamo che le due forze che intervengono nella Terza legge di Newton agiscono su sistemi diversi, questa legge non è quindi da confondere con la condizione di equilibrio, per cui la forze in gioco agiscono sullo stesso sistema.

La Terza legge di Newton si presta a degli errori. Per evitare ciò consideriamo la seguente frase di Newton che a prima vista può sembrare problematica: “Se un cavallo tira una pietra legata ad una fune, il cavallo – per così dire – è ritratto dalla pietra con forza eguale: perocchè la corda che li unisce e che è tesa fra di essi, compie uno sforzo eguale per tirare la pietra verso il cavallo, e il cavallo verso la pietra; e tanto impedisce il progresso dell'uno, quanto promuove quello dell'altra”.

Se vogliamo interessarci al moto della pietra consideriamola come sistema, notato Σ , e facciamo un disegno con tutte le forze *esterne* agenti su Σ , vedi figura 3.8.

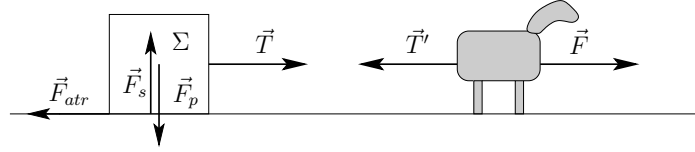


Figura 3.8: Le forze esterne che agiscono sulla pietra ($= \Sigma$).

La forza esercitata dal cavallo è indicata con $\vec{T}$. Le altre forze che agiscono sulla pietra sono: la forza peso $\vec{F}_p$, la forza di sostegno esercitata dal terreno $\vec{F}_s$ e la forza orizzontale esercitata dal terreno, dovuta all'attrito¹², $\vec{F}_{atr}$. Le forze $\vec{F}_p$ e $\vec{F}_s$ si equilibrano (la pietra non si muove verso il basso). Le forze orizzontali sono $\vec{T}$ verso destra e $\vec{F}_{atr}$ verso sinistra. La pietra si sposterà se $\vec{T}$ è maggiore di $\vec{F}_{atr}$. La reazione a $\vec{T}$, notata $\vec{T}'$, è esercitata sul cavallo, non sulla pietra. Essa non ha alcun effetto sul moto della pietra, però influenza il moto del cavallo. Se il cavallo si sposta verso destra, ci dev'essere una forza $\vec{F}$ (verso destra), esercitata dal terreno sulle zampe del cavallo, la quale è maggiore di $\vec{T}'$. Se il cavallo facesse un semplice schema con le forze, vedrebbe che tutto quello che deve fare è esercitare una forza orizzontale all'indietro sul terreno, in modo che il terreno lo spingesse in avanti.

Infatti, se il cavallo esercita una forza verso sinistra sul terreno, per il principio di azione–reazione, il terreno ne esercita una di senso opposto, stessa intensità, che lo farà avanzare.

Questa discussione è interessante pure considerando il sistema pietra + cavallo. A tale proposito è utile introdurre le seguenti definizioni.

Le forze che agiscono su un sistema Σ e hanno origine interamente nel sistema, sono chiamate **forze interne** (notate $\vec{F}^{int}$). Mentre le forze che hanno origine esterna al sistema, sono chiamate **forze esterne** (notate $\vec{F}^{est}$).

Ciò che constatiamo è che la somma delle *forze interne* ($\vec{T}$ e $\vec{T}'$) è nulla, questo è l'espressione di una versione generale della Terza legge di Newton.

Terza legge di Newton (bis): Ad ogni istante, qualsiasi sia il moto del sistema, la somma delle *forze interne* è nulla

$$\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{int} = \vec{0}.$$

¹²Per questa discussione è sufficiente sapere che l'attrito si oppone al moto.

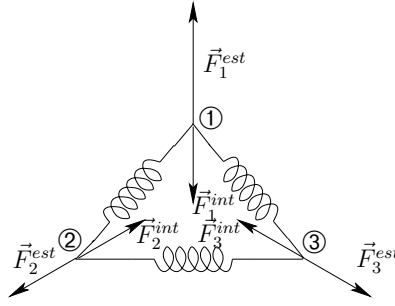


Figura 3.9: Le forze esterne ed interne che agiscono su un sistema composto da 3 PM. Per le forze interne abbiamo per esempio $\vec{F}_1^{int} = \vec{F}^{2 \rightarrow 1} + \vec{F}^{3 \rightarrow 1}$. La somma delle tre forze interne dà zero: $\vec{F}_1^{int} + \vec{F}_2^{int} + \vec{F}_3^{int} = \vec{0}$.

3.6 La Seconda legge di Newton

Sia $\mathcal{R}$ un sistema di riferimento *inerziale*. Descriveremo la dinamica da questo sistema di riferimento.

Torniamo ora allo stato $(\vec{x}, \vec{p})$. Capito l'interesse degli stati ci poniamo la domanda: “come cambia lo stato quando il tempo passa?” Se possiamo dare una risposta a questa domanda, allora possiamo pure conoscere come varia l'insieme delle osservabili quando il tempo passa. In altre parole possiamo descrivere il comportamento del sistema.

Dobbiamo quindi determinare l'**evoluzione temporale degli stati**, ossia trovare delle equazioni che ci dicono come cambia lo stato, in particolare come esso varia ad ogni istante (ossia istantaneamente). Ci serve quindi sapere qualcosa sulla variazione istantanea delle osservabili $\vec{x}(t)$ e $\vec{p}(t)$, notate

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \dots \quad \frac{d\vec{p}}{dt}(t) = \dots$$

Dalla legge $\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{x}}{dt}$ abbiamo

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \frac{\vec{p}(t)}{m}.$$

Ma cosa possiamo dire della variazione istantanea della quantità di moto?

Come abbiamo visto la quantità di moto può essere trasferita da un corpo all'altro (esperienza degli urti). Consideriamo ora la situazione in cui il sistema studiato, notato Σ , è il carrellino B della figura 3.1. Se Σ è isolato allora la sua quantità di moto non cambia, essa cambia solo se vi è un'azione dall'esterno sul sistema, nel nostro caso essa è data dalla forza che esercita il carrellino A .

La **forza** è quindi un'azione dell'esterno *sul* sistema che conduce ad una modificazione del moto¹³. La relazione precisa tra la variazione istantanea della quantità di moto è il contenuto della seconda legge di Newton. In meccanica newtoniana, l'azione di una forza è il solo modo di modificare lo stato di moto di un corpo.

¹³Ricordiamo pure che una coppia di forze può condurre ad una deformazione (legge di Hooke).

La formulazione di Newton della Seconda legge è: “Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa”.

La formulazione moderna di tale legge è la seguente.

Seconda legge di Newton: *Rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, la variazione istantanea (rispetto al tempo) della quantità di moto di un punto materiale è uguale alla risultante delle forze esterne agenti su di esso:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{est} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{est}, \quad (3.7)$$

dove il simbolo $\frac{d\vec{p}}{dt}$ rappresenta la variazione istantanea della quantità di moto $\vec{p}$ e $\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{est}$ rappresenta la somma di tutte le forze esterne agenti sul PM (chiamata risultante delle forze e notata sovente solo $\vec{F}^{est}$).

Osservazione Poiché la variazione istantanea della quantità di moto vale

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

si ottiene la formulazione semplice della seconda legge di Newton

$$m\vec{a} = \vec{F}^{est}.$$

Con questa legge di Newton si conclude la formulazione delle tre leggi della meccanica newtoniana.

Le **equazioni dell'evoluzione temporale dello stato** $(\vec{x}, \vec{p})$ del PM sono quindi

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \frac{\vec{p}(t)}{m} \quad (3.8)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}(t) = \vec{F}^{est}(t) \quad (3.9)$$

Conoscendo le forze esterne che agiscono sul sistema è possibile determinare in modo **unico** l'evoluzione temporale dello stato $(\vec{x}, \vec{p})$ grazie alle equazioni (3.8) e (3.9), a condizione però di conoscere lo stato iniziale $(\vec{x}_0, \vec{p}_0)$, chiamato anche **condizione iniziale**, ossia lo stato all'istante iniziale t_0 :

$$(\vec{x}_0, \vec{p}_0) \xrightarrow{\text{evoluzione temporale}} (\vec{x}(t), \vec{p}(t))$$

questo fatto è di estrema importanza, infatti l'implicazione *causale*¹⁴ qui sopra è la chiave del **determinismo** classico, ossia della possibilità di determinare *univocamente* lo stato del sistema ad un istante ulteriore conoscendo lo stato attuale. Reciprocamente, conoscendo l'evoluzione temporale del sistema, quindi anche la funzione $\vec{p}(t)$, possiamo determinare le forze che causano il moto.

¹⁴Ossia implicazione di “causa-effetto”.

3.7 Alcuni esempi di forze

3.7.1 Forza peso

Per definizione, la **forza peso** di un corpo è la forza esercitata dalla Terra sul corpo sulla sua superficie o nelle sue immediate vicinanze.

La forza peso $\vec{F}_p = \vec{F}^{\text{Terra} \rightarrow \Sigma}$ è diretta dal centro del corpo verso il centro della Terra (vedi figura 3.10), e la sua intensità è costante e direttamente proporzionale alla massa (gravitazionale) m del corpo:

$$\vec{F}_p = m\vec{g} \quad (3.10)$$

dove $\vec{g}$ è il vettore **campo gravitazionale** la cui intensità vale

$$g = 9,81 \text{ N/kg} \quad (3.11)$$

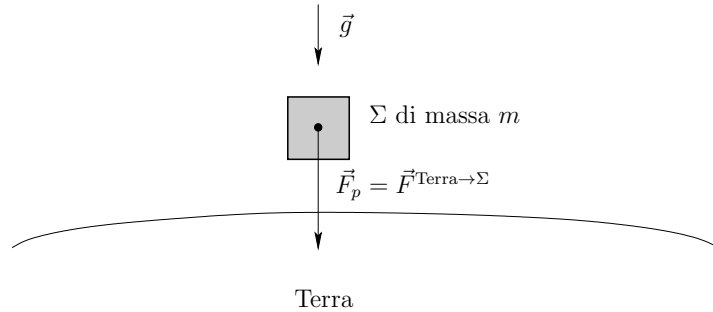


Figura 3.10: Forza peso $\vec{F}_p$ e campo gravitazionale $\vec{g}$.

3.7.2 Forza elastica

Il concetto di forza elastica è assai generale, in particolare va subito sottolineato che una forza elastica *non* è sempre legata alla presenza di una molla, benché è utile *rappresentare* questa forza come una forza di richiamo provocata da una molla.

In generale una **forza elastica** $\vec{F}_{el}$ è una forza che ha la proprietà di essere direttamente proporzionale al vettore posizione del sistema e di verso opposto, poco importa chi esercita la forza. Quindi scriveremo

$$\vec{F}_{el} = -k\vec{x} \quad (3.12)$$

dove k è chiamata costante elastica ed è positiva ($k > 0$).

Un punto materiale la cui evoluzione temporale è caratterizzata dalla forza (3.12) è chiamato **oscillatore armonico**; il modello dell'oscillatore armonico può essere considerato uno dei sistemi fisici più importanti. Per esempio a livello microscopico si modellizzano le vibrazioni degli atomi in un reticolo cristallino come un insieme di oscillatori armonici, vediamo quindi che l'associazione forza elastica $\leftrightarrow$ molla è più che insufficiente.

Caso della forza esercitata da una molla.

La situazione nel caso in cui la forza elastica è esercitata da una molla è rappresentata nella figura 3.11.

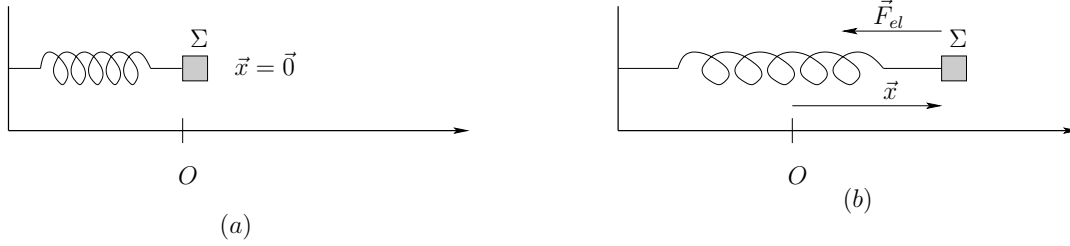


Figura 3.11: Forza elastica $\vec{F}_{el} = \vec{F}^{\text{molla} \rightarrow \Sigma}$ esercitata da una molla su un punto materiale (= sistema). Il vettore $\vec{x}$ è il vettore posizione del PM, la cui lunghezza x corrisponde pure all'allungamento della molla. (a) Situazione con la molla a riposo ($x = 0$), (b) Situazione con un allungamento della molla $x \neq 0$.

3.7.3 Forza di attrito viscoso

L'**attrito viscoso** rappresenta l'azione esercitata da un fluido (per esempio l'aria) su un solido (per esempio un paracadutista), ed è un'azione che si oppone al movimento del solido rispetto al fluido.

Consideriamo un solido che si muove su una retta con una velocità $\vec{v}$ in un *fluido immobile*¹⁵, la forza d'attrito viscoso $\vec{F}_{atr}$, che si oppone al movimento, è diretta nel senso opposto di $\vec{v}$, vedi figura 3.12. Se $\hat{v}$ rappresenta il vettore (di lunghezza 1) che indica la direzione e il verso di $\vec{v}$ possiamo scrivere la **forza di attrito viscoso** come

$$\vec{F}_{atr} = -f(v)\hat{v}$$

dove $f(v)$ è una funzione positiva del valore della velocità ($f(v) \geq 0$), determinata a partire dall'osservazione.

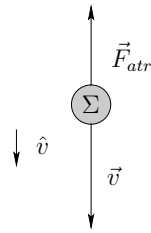


Figura 3.12: La forza d'attrito ha verso opposto, ma stessa direzione della velocità. $\hat{v}$ rappresenta il vettore unitario che indica direzione e verso della velocità ed è quindi opposto al vettore forza d'attrito.

Tipicamente la forma della funzione $f(v)$ dipende dal valore della velocità. Generalmente si pone

$$\vec{F}_{atr} = -\lambda v^n \hat{v} \quad (3.13)$$

dove n varia con la velocità e il coefficiente λ è chiamato **coefficiente di attrito**, è positivo e dipende dalla temperatura.

¹⁵Se il fluido si muove a velocità $\vec{v}_H$ allora la velocità $\vec{v}$ riportata in questa sezione deve essere sostituita da $\vec{v} = \vec{v}_s - \vec{v}_H$, dove $\vec{v}_s$ è la velocità del solido.

Si può misurare la forza di attrito misurando la forza esterna che bisogna applicare al solido per mantenere la velocità $\vec{v}$ costante (vedi figura 3.13). Come sappiamo la velocità è costante se $\vec{a} = \vec{0}$. Dall'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$, dove qui $\vec{F} = \vec{F}^{est} + \vec{F}_{atr}$, deduciamo $\vec{F}^{est} = -\vec{F}_{atr}$.

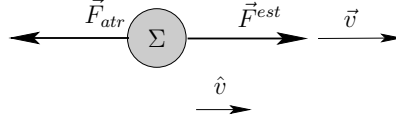


Figura 3.13: Per mantenere la velocità $\vec{v}$ costante si deve applicare una forza $\vec{F}^{est}$ che si oppone alla forza d'attrito $\vec{F}_{atr}$.

Basse velocità. La forza di attrito è data da quella che è conosciuta come *legge di Stokes*

$$\vec{F}_{atr} = -k\eta v\hat{v} = -k\eta \vec{v} \quad (3.14)$$

dove k è un coefficiente che dipende dalla geometria, per una sfera di raggio R , $k = 6\pi R$. η , chiamato *coefficiente di viscosità*, è una grandezza caratteristica del fluido che dipende dalla temperatura.

Velocità più elevate. ¹⁶ La forza di attrito è proporzionale al quadrato della velocità:

$$\vec{F}_{atr} = -\frac{1}{2}C_x\rho_{\text{fl}}Sv^2\hat{v} \quad (3.15)$$

dove ρ_{fl} è la densità del fluido, S la proiezione del solido su un piano perpendicolare alla velocità (vedi figura 3.14) e C_x è un parametro (senza unità di misura) che dipende dalla forma del solido, chiamato *coefficiente di traino* (vedi figura 3.15).

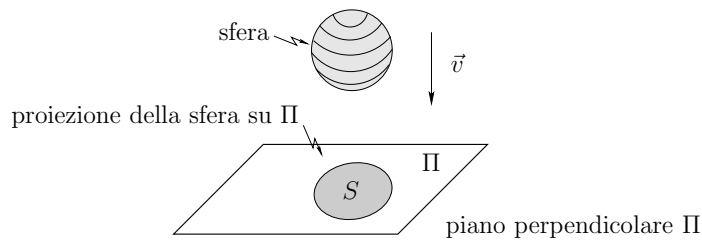


Figura 3.14: Proiezione di una sfera sul piano Π perpendicolare alla velocità $\vec{v}$, si ha un cerchio, la cui area dà il parametro S .

¹⁶Comunque velocità inferiori alla velocità del suono nel fluido.

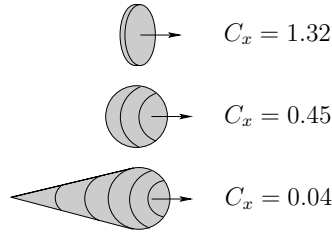


Figura 3.15: Alcuni coefficienti C_x . La freccia indica la direzione e il verso della velocità.

Come appena visto si distinguono due casi per l'attrito viscoso: basse velocità e velocità più elevate. La caratterizzazione di questi due regimi sta nel comportamento del fluido al passaggio del solido:

- se il fluido non presenta una perturbazione al passaggio del solido, allora si parla di *regime laminare*, in tal caso si utilizza la legge di Stokes,
- se il fluido presenta delle turbolenze al passaggio del solido, allora si parla di *regime turbolento*, e si utilizza la legge per velocità più elevate.

La transizione tra il regime laminare e quello turbolento può essere quantificato grazie ad un parametro chiamato **numero di Reynolds** R_e che caratterizza il comportamento del fluido, esso è definito nel modo seguente

$$R_e = \frac{\rho_{\text{fl}} d v}{\eta} \quad (3.16)$$

dove d è un parametro geometrico (unità di misura m) che caratterizza il solido; per esempio per una sfera di raggio R si ha $d = 2R$.

Il regime laminare (basse velocità) è caratterizzato da $R_e < 1$, mentre ad alte velocità si ha $R_e > 2400$, tra i due estremi vi è una zona in cui è necessario analizzare in dettaglio la situazione.

3.7.4 Forza di attrito radente

L'**attrito radente** rappresenta l'azione di una superficie rigida (per esempio un tavolo) su un solido (per esempio un libro), ed è un'azione che si oppone al movimento del solido rispetto alla superficie (che qui supponiamo immobile).

Se $\vec{F}^{S \rightarrow \Sigma}$ rappresenta la forza esercitata dalla superficie S sul solido (= sistema Σ), possiamo vedere questa forza come una somma di due contribuzioni.

La prima, parallela alla superficie, è la **forza di attrito radente** $\vec{F}_{\text{atr}}$, la seconda invece è perpendicolare alla superficie ed è chiamata¹⁷ **forza di reazione normale** $\vec{N}$, vedi figura 3.16 (a).

Possiamo misurare la forza di attrito radente come nel caso viscoso, ossia misurando la forza esterna che bisogna applicare al solido per mantenere la velocità costante. In questo caso l'esperienza mostra che bisogna trattare separatamente i casi $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = \vec{0}$.

¹⁷Attenzione a non confonderla con la reazione della Terza legge di Newton.

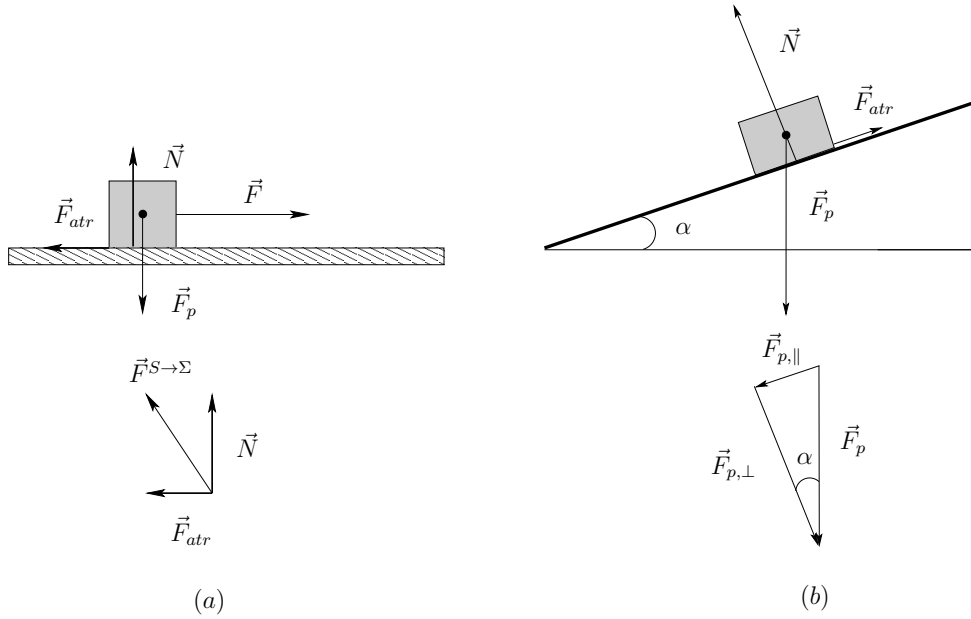


Figura 3.16: (a) Su un piano orizzontale $\vec{F}_p = -\vec{N}$ (quindi $N = mg$) La forza $\vec{F}$ è responsabile del moto del solido, ma ciò solo se $F > F_{atr,max}$ altrimenti non si muove. (b) Su un piano inclinato possiamo scomporre il vettore $\vec{F}_p = \vec{F}_{p,\perp} + \vec{F}_{p,\parallel}$ e si ha $\vec{F}_{p,\perp} = -\vec{N}$ (quindi $N = mg \cos \alpha$, e $F_{p,\parallel} = mg \sin \alpha$). La forza $\vec{F}_{p,\parallel}$ è responsabile del moto del solido, ma ciò solo se $F_{p,\parallel} > F_{atr,max}$ altrimenti non si muove.

Caso $\vec{v} \neq \vec{0}$. L'osservazione conduce alla **legge di Coulomb (attrito dinamico)**:

$$\vec{F}_{atr} = -\mu_c N \hat{v} \quad (3.17)$$

μ_c è un coefficiente positivo, chiamato **coefficiente di attrito cinetico**, che dipende dallo stato della superficie e dalla *temperatura*.

Caso $\vec{v} = \vec{0}$. Nel caso in cui il solido è fermo, fin tanto che l'intensità della forza esterna $\vec{F}^{est}$ è inferiore a un valore limite $F_{atr,max}$, chiamata *forza di strappo*, il corpo resta immobile. In questa situazione la superficie esercita sul corpo una forza di attrito uguale in intensità e di verso opposto alla forza esterna. Quando la forza esterna supera $F_{atr,max}$ il solido si mette in moto, e si osserva che la forza per mantenere la velocità costante è costante, e generalmente inferiore a $F_{atr,max}$.

L'osservazione conduce alla **legge di Coulomb (attrito statico)**:

$$F_{atr} \leq F_{atr,max} = \mu_s N \quad \text{se } \vec{v} = \vec{0} \quad (3.18)$$

Il coefficiente μ_s si chiama **coefficiente di attrito statico** e dipende dalla natura della superficie.

3.8 Potenza e lavoro

Consideriamo una forza $\vec{F}$ il cui punto di applicazione, tipicamente un PM, è dato, rispetto ad un sistema di riferimento $\mathcal{R}$ prescelto, dal vettore posizione $\vec{x}$. Supponiamo che il punto di applicazione della forza si sposta nel corso del tempo, vedi figura 3.17, e notiamo $\vec{v}$ la sua velocità.

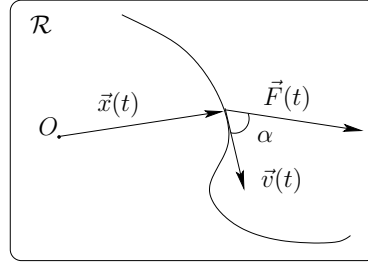


Figura 3.17: Forza $\vec{F}(t)$ il cui punto di applicazione $\vec{x}(t)$ si muove rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{R}$.

Per definizione, la **potenza** sviluppata dalla forza $\vec{F}$ all'istante t è la grandezza *scalare* definita da¹⁸

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha = \sum_{i=1}^d F_i v_i \quad (3.19)$$

dove $\vec{v}$ è la velocità del PM (= punto di applicazione della forza) rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{R}$ e $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo tra il vettore $\vec{F}$ e il vettore $\vec{v}$. F indica l'intensità della forza e v il valore della velocità, che ricordiamo sono numeri positivi. La seconda uguaglianza è l'espressione del prodotto scalare rispetto ad una base ortonormata e d è la dimensione dello spazio. Se $d = 1$ possiamo convincerci di questo risultato nel modo seguente:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = [F_1 \vec{e}_1] \cdot [v_1 \vec{e}_1] = F_1 v_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = F_1 v_1 \underbrace{(e_1 e_1 \cos 0)}_{=1}.$$

Casi particolari.

- $\vec{F}$ con stessa direzione e stesso verso di $\vec{v}$: in questo caso $\alpha = 0$ e quindi¹⁹ $P = Fv$. È il caso di un PM trainato con un cavo (il cavo esercita la forza $\vec{F}$ il cui punto di applicazione si muove nella direzione del traino).
- $\vec{F}$ con stessa direzione ma verso opposto a $\vec{v}$: in questo caso $\alpha = \pi$ e quindi²⁰ $P = -Fv$. È il caso di un PM che si muove (striscia) con velocità $\vec{v}$ e subisce una forza di attrito che si oppone al moto.
- $\vec{F}$ perpendicolare a $\vec{v}$: in questo caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e quindi²¹ $P = 0$.

¹⁸Attenzione: il puntino tra i vettori $\vec{F}$ e $\vec{v}$ si chiama *prodotto scalare* ed è un'operazione che a due vettori associa un numero reale, il puntino non è quindi la moltiplicazione usuale in $\mathbb{R}$!

¹⁹Abbiamo $\cos 0 = 1$.

²⁰Abbiamo $\cos \pi = -1$.

²¹Abbiamo $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Osserviamo che, considerando il PM come sistema, la potenza rappresenta una *grandezza inerente sia il sistema sia l'esterno*, infatti la forza $\vec{F}$ rappresenta un'azione dall'esterno sul sistema. La potenza è una *grandezza istantanea*, ossia riferita ad un preciso istante di tempo.

L'unità di misura della potenza nel sistema internazionale è il Watt definito da $1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$.

Il **lavoro** effettuato dalla forza $\vec{F}$ durante l'intervallo di tempo (t_i, t_f) è definito da

$$W(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} P(t) dt \quad (3.20)$$

dove il simbolo $\int_{t_i}^{t_f} P(t) dt$ sta ad indicare l'area nel grafico $P(t)$ della potenza tra gli istanti t_i e t_f che va calcolata come nell'esempio della figura 3.18 (con la convenzione Area 1, Area 2, Area 3 > 0)

$$\int_{t_i}^{t_f} P(t) dt = \text{Area } \textcircled{1} - \text{Area } \textcircled{2} + \text{Area } \textcircled{3} .$$

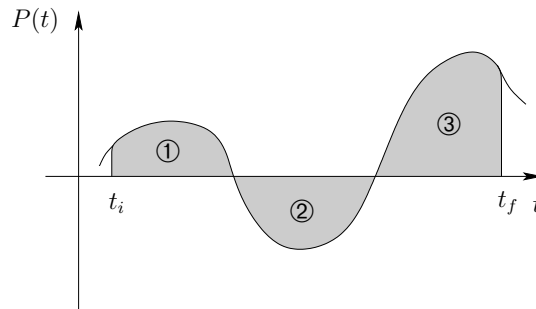


Figura 3.18: Il lavoro effettuato tra gli istanti t_i e t_f corrisponde all'area nel grafico della potenza.

Se la potenza in considerazione è sviluppata da una forza esterna (tipicamente nel caso di un PM), allora anche il lavoro sarà una *grandezza che riguarda l'interazione esterno-sistema*. Al contrario della potenza invece il lavoro non è una grandezza istantanea, ma si riferisce ad un intervallo di tempo, e perciò è detta *grandezza integrata*.

Caso particolare in cui $\vec{F}$ è costante.

Se la forza $\vec{F}$ è *costante* (*Attenzione*: costante per una grandezza vettoriale significa che non cambia intensità, direzione e verso!) allora si ha

$$W(t_i, t_f) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = \vec{F} \cdot [\vec{x}(t_f) - \vec{x}(t_i)] \quad (3.21)$$

Convinciamoci di questo risultato su un esempio semplice in cui un PM parte da fermo e subisce unicamente la forza $\vec{F}$. In questo caso il moto del PM è un MRUA in cui forza

e velocità hanno stessa direzione e verso. Quindi $P(t) = Fv(t) \cos \alpha = Fv(t) = F_1 v_1(t)$ e quindi il lavoro vale

$$W(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} F_1 v_1(t) dt = F_1 \int_{t_i}^{t_f} v_1(t) dt$$

poiché l'area nel grafico $P(t)$ è F_1 volte l'area nel grafico $v_1(t) = a_0 t$, come si può facilmente vedere nella figura 3.19. Infatti

$$\int_{t_i}^{t_f} P(t) dt = \frac{1}{2}[P(t_f) + P(t_i)](t_f - t_i) = F_1 \left[\frac{1}{2}[v_1(t_f) + v_1(t_i)](t_f - t_i) \right] = F_1 \int_{t_i}^{t_f} v_1(t) dt .$$

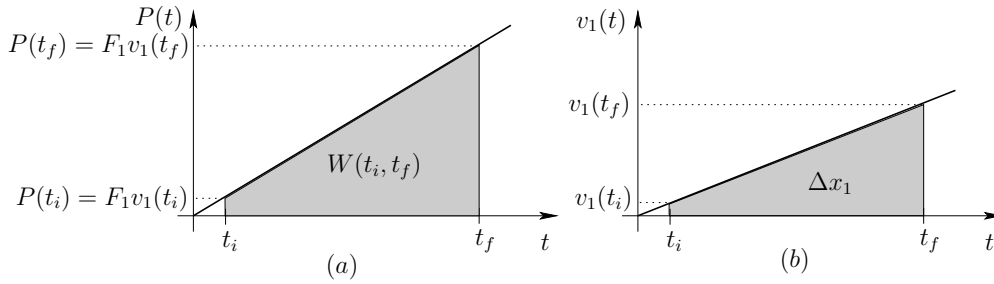


Figura 3.19: (a) L'area nel grafico della potenza corrisponde al lavoro $W(t_i, t_f)$ sviluppato dalla forza $\vec{F}$ tra gli istanti t_i e t_f . (b) L'area nel grafico della velocità corrisponde alla lunghezza dello spostamento Δx_1 .

Ora l'area nel grafico $v_1(t)$ ci dà la lunghezza dello spostamento²² $x_1(t_f) - x_1(t_i)$ e quindi possiamo scrivere

$$W(t_i, t_f) = F_1[x_1(t_f) - x_1(t_i)] = F_1 \Delta x_1 \quad (3.22)$$

e possiamo riesprimere il tutto con un prodotto scalare, dunque

$$W(t_i, t_f) = \vec{F} \cdot [\vec{x}(t_f) - \vec{x}(t_i)] = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

Dalla formula (3.22) possiamo vedere che il lavoro, nel caso di una forza costante corrisponde all'area nel grafico della forza (o meglio della componente della forza) F_1 in funzione di x_1 . Infatti, come si può notare nella figura 3.20 abbiamo:

$$\text{Area} = F_1(x_{1,f} - x_{1,i}) = F_1 \Delta x_1$$

Questa possibilità per calcolare il lavoro può essere applicata non solo al caso di una forza costante, ma anche per tutte le forze che dipendono unicamente dalla posizione (vedi oltre per un esempio), per far ciò si considerano tanti piccoli intervalli in cui la forza non varia molto e si prendono questi intervalli sempre più piccoli (vedi figura 3.21 (a) e (b)).

²²Vedi capitolo di Cinematica del PM.

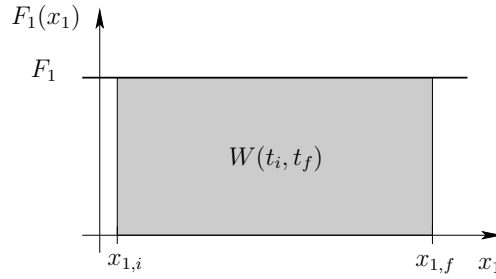


Figura 3.20: Il lavoro effettuato da una forza costante calcolato nel grafico della forza.

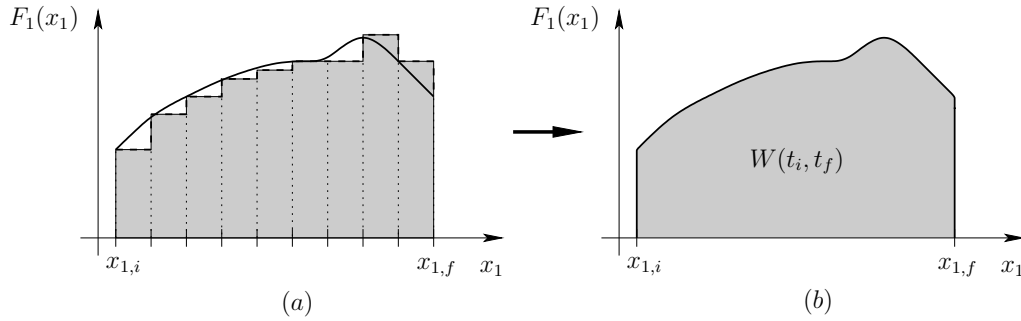


Figura 3.21: (a) Per una forza che dipende solo da $\vec{x}$ si può approssimare il lavoro come area nel grafico della forza prendendo tanti piccoli intervalli, (b) per intervalli infinitamente piccoli si ha l'area sotto il grafico della forza.

Sapendo che $\cos \alpha = 0$, se l'angolo α vale $\frac{\pi}{2}$ possiamo notare che, per le forze perpendicolari alla velocità del loro punto di applicazione, la potenza sviluppata è nulla. Questa osservazione ci conduce ad introdurre le seguenti definizioni.

Una **forza** è detta **passiva** se il lavoro durante l'evoluzione temporale è nullo, una forza è detta **attiva** nel caso contrario.

Nel caso generale in cui il sistema è formato da N punti materiali, il sistema subirà delle forze esterne $\vec{F}^{est}$ (dovute dall'esterno) e delle forze interne $\vec{F}^{int}$ (dovute alle azioni reciproche tra i vari punti materiali), e avremo quindi sia delle potenze e lavori esterni (P^{est} , $W^{est}(t_i, t_f)$) sia interni (P^{int} , $W^{int}(t_i, t_f)$).

L'unità di misura del lavoro nel sistema internazionale è il Joule, definito da $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$.

3.9 Energia cinetica

Consideriamo un punto materiale di massa m la cui velocità rispetto al sistema di riferimento (inerziale) $\mathcal{R}$ è $\vec{v}$. Per definizione, l'**energia cinetica** del PM è la grandezza *positiva*²³, *estensiva* definita da

$$E^{cin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.23)$$

²³Quindi anche *scalare*.

L'energia cinetica è quindi una *grandezza che riguarda unicamente il PM* (= sistema) e dipende dal suo stato di moto. L'*energia cinetica è quindi un'osservabile*.

Notiamo che la conoscenza dello stato del sistema (quindi l'informazione su $(\vec{x}, \vec{p})$) ad un dato istante ci permette di determinare il valore dell'energia cinetica a quell'istante, infatti possiamo anche scrivere

$$E^{cin} = \frac{p^2}{2m} . \quad (3.24)$$

Enunciamo ora il teorema dell'energia cinetica, nel caso generale in cui il sistema è formato da N punti materiali. Lo scopo del teorema dell'energia cinetica è di legare le grandezze energia cinetica, lavoro e potenza che per il momento sono grandezze definite ma che non hanno ancora dei legami.

Teorema dell'energia cinetica

La variazione di energia cinetica durante l'intervallo di tempo (t_i, t_f) è uguale alla somma del lavoro effettuato da *tutte* le forze esterne ed interne:

$$\Delta E^{cin}(t_i, t_f) = W^{est}(t_i, t_f) + W^{int}(t_i, t_f) \quad (3.25)$$

Dimostrazione (nel caso di una sola forza esterna $\vec{F}$ costante). In questo caso sappiamo che abbiamo un MRUA, e senza perdere in generalità possiamo scegliere $t_0 = 0$ e $\vec{v}_0 = \vec{0}$, quindi $\vec{v}(t) = \vec{a}_0 t$ con $\vec{a}_0 = \frac{\vec{F}}{m}$ (forza e velocità sono parallele e di stesso verso).

La potenza sviluppata dalla forza $\vec{F}$ vale quindi

$$P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t) = ma_0^2 t$$

e l'area nel suo grafico tra gli istanti t_i e t_f vale (vedi figura 3.22)

$$W(t_i, t_f) = \frac{1}{2}[P(t_f) + P(t_i)](t_f - t_i) = \frac{1}{2}(ma_0^2 t_f + ma_0^2 t_i)(t_f - t_i) = \frac{1}{2}ma_0^2(t_f^2 - t_i^2)$$

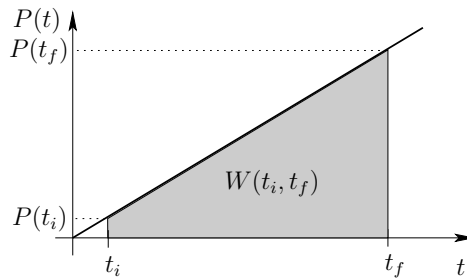


Figura 3.22: L'area nel grafico della potenza corrisponde al lavoro $W(t_i, t_f)$ sviluppato dalla forza $\vec{F}$ tra gli istanti t_i e t_f .

D'altra parte abbiamo

$$\Delta E^{cin}(t_i, t_f) = \frac{1}{2}m[v(t_f)^2 - v(t_i)^2] = \frac{1}{2}ma_0^2(t_f^2 - t_i^2)$$

ciò che dimostra (3.25).

Osservazione È molto importante sottolineare che, al contrario delle leggi del moto (seconda legge di Newton), dove le forze interne non appaiono, le forze interne sono essenziali nel teorema dell'energia cinetica. Infatti una macchina che accelera su una strada orizzontale subisce unicamente delle forze esterne sottoforma di attrito, che sviluppano quindi una potenza negativa $P^{est} < 0$, mentre però l'energia cinetica aumenta: è quindi essenziale considerare la potenza sviluppata dalle forze interne al sistema.

3.10 Energia meccanica

Vogliamo ora cercare di classificare le forze a dipendenza del lavoro effettuato, sappiamo già che una prima classificazione possibile è quella in forze attive e passive. Qui il criterio sarà un altro.

Consideriamo due punti A e D , di vettore posizione $\vec{x}_A$ e $\vec{x}_D$, e due possibili traiettorie γ e δ per andare da A a D (vedi figura 3.23).

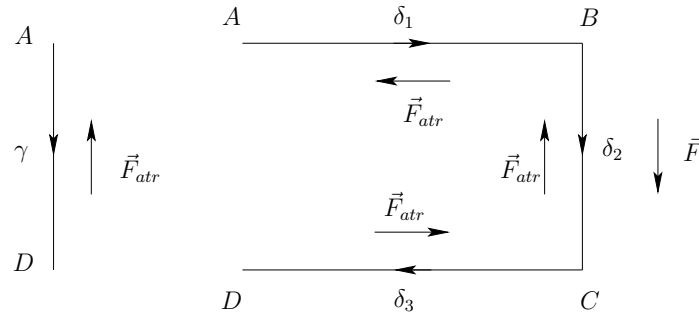


Figura 3.23: Le due possibili traiettorie (γ e $\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3$) per andare da A a D . Accanto alla traiettorie sono disegnate le forze d'attrito radente, a destra è indicata la forza costante.

Analizziamo il lavoro svolto da due diverse forze seguendo le due traiettorie, notiamo $W(\gamma)$ il lavoro svolto lungo γ e $W(\delta)$ quello svolto lungo δ .

- Una forza d'attrito radente $\vec{F}_{atr}$, dove notiamo $\vec{F}_{atr}(\gamma)$ il vettore forza d'attrito lungo la traiettoria γ e così per le altre traiettorie. Si noti che la forza d'attrito radente non è costante poiché cambia verso (malgrado il fatto che la sua intensità non cambia). La forza d'attrito radente può però essere considerata costante su ogni segmento e quindi è possibile utilizzare la formula (3.21) per calcolare il lavoro in ogni segmento.

$$\begin{aligned}
 W(\gamma) &= \vec{F}_{atr}(\gamma) \cdot [\vec{x}_D - \vec{x}_A] \\
 W(\delta) &= W(\delta_1) + W(\delta_2) + W(\delta_3) \\
 &= \vec{F}_{atr}(\delta_1) \cdot [\vec{x}_B - \vec{x}_A] + \underbrace{\vec{F}_{atr}(\delta_2)}_{=\vec{F}_{atr}(\gamma)} \cdot \underbrace{[\vec{x}_C - \vec{x}_B]}_{=[\vec{x}_D - \vec{x}_A]} + \underbrace{\vec{F}_{atr}(\delta_3)}_{=-\vec{F}_{atr}(\delta_1)} \cdot \underbrace{[\vec{x}_D - \vec{x}_C]}_{=-[\vec{x}_B - \vec{x}_A]} \\
 &= W(\gamma) + 2W(\delta_1)
 \end{aligned}$$

e dunque

$$W(\gamma) \neq W(\delta).$$

- Una forza costante $\vec{F}$ con direzione e verso da A a D (per esempio la forza peso):

$$\begin{aligned}
 W(\gamma) &= \vec{F} \cdot [\vec{x}_D - \vec{x}_A] \\
 W(\delta) &= W(\delta_1) + W(\delta_2) + W(\delta_3) \\
 &= \underbrace{\vec{F} \cdot [\vec{x}_B - \vec{x}_A]}_{=0 \text{ } (\alpha=\pi/2)} + \underbrace{\vec{F} \cdot [\vec{x}_C - \vec{x}_B]}_{=[\vec{x}_D - \vec{x}_A]} + \underbrace{\vec{F} \cdot [\vec{x}_D - \vec{x}_C]}_{=0 \text{ } (\alpha=\pi/2)}
 \end{aligned}$$

e dunque

$$W(\gamma) = W(\delta) .$$

Constatiamo che esistono delle forze per le quali il lavoro sviluppato *non* dipende dalla traiettoria per andar da A a D , ma unicamente dalla posizione iniziale (qui $\vec{x}_A$) e dalla posizione finale (qui $\vec{x}_D$), mentre altre forze dipendono dalla traiettoria²⁴.

La dipendenza del lavoro dalla traiettoria è quindi un altro criterio che ci permette di classificare le forze. Per definizione una forza è detta **conservativa** se il lavoro che effettua dipende unicamente dalla posizione iniziale $\vec{x}_i$ e dalla posizione finale $\vec{x}_f$ e non dalla traiettoria specifica, *cioè per ogni possibile posizione iniziale e finale*. Nel caso contrario la forza è detta non conservativa.

Noteremo $P^{(c)}$ la potenza sviluppata dalle forze conservative e $P^{(nc)}$ la potenza sviluppata dalle forze non conservative.

Ecco una classificazione di alcune forze utilizzate in questo corso:

Nome	Forza $\vec{F}$	conservativa
Forze costanti	$\vec{F}$	sì
Forza peso	$m\vec{g}$	sì
Forza elastica	$-k\vec{x}$	sì
Forza d'attrito viscoso	$-\lambda\vec{v}, -\lambda v^2\hat{v}$	no
Forza d'attrito radente	$-\mu N\hat{v}$	no

Come possiamo constatare dagli esempi, le forze conservative non dipendono dalla velocità $\vec{v}$, ma unicamente dalla posizione $\vec{x}$ (ma non per forza tutte le forze che dipendono unicamente dalla posizione sono conservative!) o sono costanti, dove ricordiamolo ancora una volta costante significa intensità direzione e verso sempre uguale.

Le forze conservative hanno delle proprietà interessanti, infatti per ogni forza $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ conservativa è possibile associare una funzione $E^{pot} = E^{pot}(\vec{x})$ tale che il lavoro generato dalla forza soddisfa la relazione

$$W^{(c)}(t_i, t_f) = -\Delta E^{pot}(t_i, t_f) = -(E^{pot}(t_f) - E^{pot}(t_i)) \quad (3.26)$$

²⁴Una caratterizzazione equivalente è quella di controllare se il lavoro sviluppato lungo una *traiettoria chiusa* ($A = D$) è *nullo*: in tal caso il lavoro *non* dipende dalla traiettoria. Nel caso contrario il lavoro dipende dalla traiettoria. Come si può verificare sul caso precedente ponendo $A = D$ (e quindi $B = C$), oppure calcolando il lavoro sulla traiettoria $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$

ossia il lavoro generato da una forza conservativa è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale associatagli.

La funzione E^{pot} è chiamata **energia potenziale associata alla forza $\vec{F}$** , da notare che essa dipende unicamente dalla posizione $\vec{x}$ (poiché la forza $\vec{F}$ dipende unicamente dalla posizione). Un'altra proprietà importante dell'energia potenziale è che ad una data forza conservativa corrispondono più energie potenziali, infatti la variazione istantanea della funzione $\tilde{E}^{pot} = E^{pot} + C$ (con C una costante) dà la stessa potenza della funzione E^{pot} , poiché la variazione di una costante è nulla:

$$W^{(c)}(\text{con } \tilde{E}^{pot}) = -\Delta \tilde{E}^{pot} = -\Delta E^{pot} + C = -\Delta E^{pot} - \underbrace{\Delta C}_{=0} = W^{(c)}(\text{con } E^{pot}) .$$

Cerchiamo ora alcune espressioni per l'energia potenziale associata ad alcune forze.

- Dimostriamo che l'energia potenziale associata ad una *forza costante* $\vec{F}$ è

$$E^{pot}(\vec{x}) = -\vec{F} \cdot \vec{x} \quad (3.27)$$

Partendo dal fatto che per una forza costante $W^{(c)} = F_1[x_1(t_f) - x_1(t_i)]$ (vedi formula (3.22)), e grazie a (3.26) possiamo concludere che $E^{pot}(\vec{x}) = -F_1 x_1 = -\vec{F} \cdot \vec{x}$.

- Dimostriamo che l'energia potenziale associata ad una *forza elastica* $\vec{F} = -k\vec{x}$ è²⁵

$$E^{pot}(\vec{x}) = \frac{1}{2} k x^2 . \quad (3.28)$$

Per questa dimostrazione consideriamo il grafico della forza $F_1 = -kx_1$, e il fatto che possiamo calcolare il lavoro $W^{(c)}$ nel grafico della forza come spiegato nella figura 3.21.

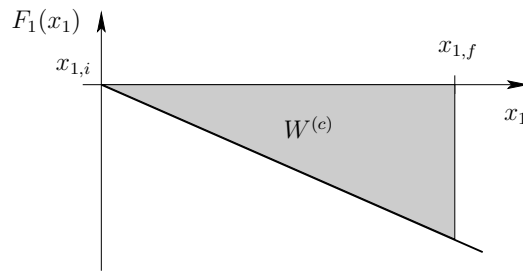


Figura 3.24: Il lavoro effettuato dalla forza elastica $F_1 = -kx_1$ è negativo.

Nel caso in cui²⁶ $\vec{x}_i = \vec{0}$ a $\vec{x}_f = \vec{x}$ si ha²⁷

$$W^{(c)} = \frac{1}{2} F_1(x_{1,f})(x_{1,f} - x_{1,i}) = \frac{1}{2} (-kx_1)x_1 = -\frac{1}{2} kx_1^2 = -\frac{1}{2} kx^2$$

²⁵Nel caso della forza esercitata da una molla sul PM (= sistema) $\vec{x} = \vec{0}$ corrisponde alla posizione in cui la molla non è allungata (posizione di riposo), quindi x corrisponde all'allungamento della molla.

²⁶Se consideriamo una molla allora ciò corrisponde all'allungamento della molla da $\vec{x}_i = \vec{0}$ a $\vec{x}_f = \vec{x}$.

²⁷Per l'ultima uguaglianza utilizziamo $x_1^2 = x_1 x_1 = \vec{x} \cdot \vec{x} = x^2$.

grazie a (3.26) abbiamo

$$-\frac{1}{2}kx^2 = -(E^{pot}(\vec{x}) - E^{pot}(\vec{0}))$$

e scegliendo $E^{pot}(\vec{0}) = 0$ troviamo il risultato cercato.

Consideriamo ora l'evoluzione di un punto materiale che subisce delle forze conservative, che generano un lavoro $W^{(c)}$, e delle forze non conservative, che generano una lavoro $W^{(nc)}$. Scriviamo ancora E^{pot} per la somma delle energie potenziali.

Partendo dal teorema dell'energia cinetica possiamo scrivere

$$\Delta E^{cin} = W = W^{(c)} + W^{(nc)}$$

da cui, utilizzando (3.26), abbiamo

$$\Delta E^{cin} = -\Delta E^{pot} + W^{(nc)} \implies \Delta(E^{cin} + E^{pot}) = W^{(nc)} . \quad (3.29)$$

Per definizione, chiamiamo **energia meccanica** la grandezza

$$E^{mec}(\vec{x}, \vec{p}) = E^{cin}(\vec{p}) + E^{pot}(\vec{x}) \quad (3.30)$$

dove abbiamo notato esplicitamente la dipendenza dalle variabili che definiscono lo stato del PM.

Riassumiamo nel teorema seguente i risultati fondamentali sull'energia meccanica, esso vale pure nel caso di un sistema formato da N punti materiali.

Teorema dell'energia meccanica

- La variazione di energia meccanica durante l'intervallo di tempo (t_i, t_f) è uguale alla somma del lavoro effettuato da tutte le forze che non contribuiscono all'energia potenziale:

$$\Delta E^{mec}(t_i, t_f) = W^{(nc)}(t_i, t_f) \quad (3.31)$$

- Se tutte le forze attive sono conservative, l'energia meccanica è costante durante l'evoluzione temporale:

$$E^{mec}(t) = E^{mec}(t_0) \quad (3.32)$$

In questo caso, la variazione di energia cinetica, durante l'intervallo (t_i, t_f) , è l'opposto alla variazione di energia potenziale

$$\Delta E^{cin} = -\Delta E^{pot} . \quad (3.33)$$

Osserviamo che la contribuzione $W^{(nc)}$ contiene sia il lavoro generato dalle forze *esterne* non conservative, sia quello generato dalle forze *interne* non conservative.

3.11 Urti

In questa breve sezione definiamo gli urti ed illustriamo quali sono gli aspetti fondamentali per risolvere questo tipo di problema.

Per definizione, si chiama **urto** ogni interazione tra due o più sistemi che si effettua in un intervallo di tempo limitato: prima e dopo l'urto le forze tra i vari sistemi sono trascurabili.

Nello studio degli urti ci si interessa unicamente allo stato iniziale e allo stato finale e non al dettaglio dell'evoluzione temporale, che durante l'urto può essere molto complessa. I problemi tipici in cui intervengono gli urti sono le collisioni e le disintegrazioni di un sistema in più sottosistemi (vedi figura 3.25).

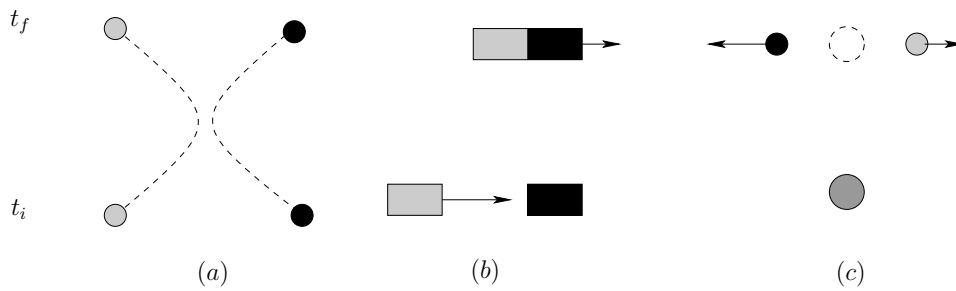


Figura 3.25: (a) Collisione (elastica o anelastica), (b) collisione completamente anelastica, (c) disintegrazione.

Se il sistema totale è *isolato* allora la quantità di moto totale e l'energia totale sono delle costanti del moto; la costanza dell'energia totale non corrisponde alla costanza dell'energia cinetica (essendo il sistema isolato e vista la definizione di urto l'energia meccanica corrisponde all'energia cinetica poiché l'energia potenziale è nulla) poiché durante l'urto una parte dell'energia cinetica può essere convertita in altre forme di energia (per esempio in energia interna U a causa di un riscaldamento dei sistemi, avremo quindi $\Delta E^{cin} = -\Delta U$).

Abbiamo la seguente *classificazione degli urti*:

- se $\Delta E^{cin} = 0$ allora l'**urto** è detto **elastico**;
- se $\Delta E^{cin} \neq 0$ allora l'**urto** è detto **anelastico**;
- se dopo l'urto la velocità dei sistemi è la stessa (e quindi i sistemi proseguono attaccati) si parla di **urto completamente anelastico**.

Per risolvere i problemi di urti in un sistema isolato si dovrà quindi sempre considerare la conservazione della quantità di moto

$$\vec{p}_{tot}(t_i) = \vec{p}_{tot}(t_f) \quad (3.34)$$

e nel caso degli urti elastici quella dell'energia (cinetica)

$$E_{tot}^{cin}(t_i) = E_{tot}^{cin}(t_f) \quad (3.35)$$

dove se $t_i = 0$ allora $t_f \rightarrow \infty$.

Capitolo 4

Elettrostatica

4.1 Introduzione

L'*elettrostatica* è una parte dell'elettrodinamica, che assieme alla meccanica e alla termodinamica costituisce le fondamenta della fisica classica fino alla fine del XIX secolo. In questo capitolo daremo una prima introduzione al soggetto, che per una visione completa e approfondita verrà ripresa nel contesto dei corsi del secondo biennio (OC e OS).

4.2 La carica elettrica

La materia è caratterizzata da alcune sue proprietà intrinseche, una ben nota è la massa gravitazionale m^* in relazione alla forza gravitazionale. Macroscopicamente esistono altre grandezza intrinseche, una di esse è la carica elettrica.

Consideriamo l'esperienza in cui una serie di bacchette sono opportunamente strofinate, si osservano allora dei fenomeni di attrazione e repulsione, questi effetti non sono riconducibili all'attrazione gravitazionale, quindi con lo strofinio le bacchette acquisiscono una nuova proprietà che chiameremo *carica elettrica*, diciamo che le bacchette sono state caricate elettricamente e diremo che tra le bacchette sussiste un'attrazione/repulsione elettrica.

Il concetto di *carica elettrica*, notata q , introdotto per descrivere queste situazioni, è quindi una grandezza fondamentale che caratterizza una proprietà di un corpo.

Nel 1785 il fisico Coulomb propone una legge (analoga a quella di Newton) per descrivere i fenomeni di attrazione e repulsione tra corpi carichi elettricamente (ritorneremo ulteriormente sulla legge di Coulomb). Ci sono però delle differenze sostanziali tra l'attrazione gravitazionale, la cui origine è la massa gravitazionale, e l'attrazione elettrica, la cui origine è questa nuova proprietà chiamata carica elettrica:

- esistono due tipi di corpi, quelli *caricati positivamente* e quelli *caricati negativamente* [nella gravitazione abbiamo unicamente corpi di massa gravitazionale positiva];

- due corpi con carica uguale si *respingono*, mentre due corpi con carica opposta si *attraggono* [nella gravitazione vi è solo attrazione];
- le forze elettriche sono immensamente più intense della forza gravitazionale.
Per due elettroni la forza elettrica è

$$10^{42} = 100$$

volte più intensa della forza gravitazionale!

Le cariche elettriche più piccole attualmente conosciute sono quelle portate dagli elettroni e dai protoni¹.

Descriviamo ora quali sono le *proprietà* della carica elettrica.

- L'esperienza mostra che la carica elettrica è sempre un *multiplo intero* positivo o negativo di una data quantità fondamentale, chiamata *carica elementare* (notata e), ossia

$$q = n e \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

dove è stato determinato sperimentalmente (*esperienza di Millikan*) che

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} . \quad (4.2)$$

Si dice che la carica elettrica è *quantificata*.

Per convenzione la carica dell'elettrone è negativa e vale $q_e = -e$, quella del protone è positiva e vale $q_p = +e$.

- La carica elettrica è una grandezza *scalare* ed *estensiva*. Se un sistema è composto da un insieme di corpi, allora la carica elettrica del sistema è la somma delle cariche elettriche dei corpi che lo compongono.
- La carica elettrica è una grandezza *conservata* ed *invariante relativistica*.

Per concludere questa sezione osserviamo che la materia può essere esaminata dal punto di vista della mobilità della carica elettrica, semplificando al massimo abbiamo due categorie: i corpi in cui la carica elettrica è libera di muoversi, chiamati **conduttori**, e i corpi nei quali le cariche elettriche non possono spostarsi, chiamati **isolanti**. È importante notare che nella materia si possono spostare unicamente le cariche negative, ossia gli elettroni, se un corpo ha carica positiva vuol dire che ha perso elettroni rispetto alla situazione di corpo neutro e non che ha acquisito protoni!

Tipicamente i corpi conduttori sono i metalli, in essi troviamo delle cariche elettriche libere di muoversi, il meccanismo è il seguente: quando gli atomi (elettricamente neutri) si legano per formare un corpo solido i loro elettroni più esterni non restano legati ai singoli atomi ma diventano liberi di muoversi all'interno del solido, questi elettroni sono chiamati *elettroni di conduzione*.

¹Se escludiamo dalla discussione i quark, particelle elementari con carica $\pm 1/3$ della carica degli elettroni.

4.3 La forza elettrostatica: legge di Coulomb

Consideriamo due punti materiali *immobili* i cui vettori posizione, relativamente ad un'origine O fissata, sono $\vec{x}_A$, rispettivamente $\vec{x}_B$, e supponiamo che questi due PM hanno una carica elettrica q_A , rispettivamente q_B . Inoltre supponiamo che i due PM sono nel *vuoto*. In funzione del segno delle cariche elettriche si assisterà ad una forza di repulsione oppure di attrazione nel modo seguente (vedi figura 4.1):

- se $q_A q_B > 0$ (stesso segno) allora la forza è *repulsiva*;
- se $q_A q_B < 0$ (segno opposto) allora la forza è *attrattiva*.

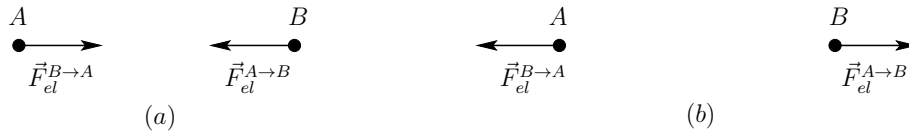


Figura 4.1: Forza elettrostatica tra due PM A e B . (a) Caso attrattivo, (b) caso repulsivo. Vale la terza legge di Newton.

L'intensità della forza elettrostatica tra questi PM elettricamente carichi dipende dal valore assoluto delle due cariche e dalla distanza tra di esse, il valore è

$$F_{el}^{A \rightarrow B} = F_{el}^{B \rightarrow A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_A q_B|}{r^2}$$

dove ϵ_0 è chiamata *costante dielettrica del vuoto* e vale $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$, quindi

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2.$$

La direzione della forza elettrostatica è diretta secondo la retta congiungente le due cariche, possiamo così esprimere la forza elettrostatica vettorialmente, si ottiene la **legge di Coulomb**

$$\vec{F}_{el}^{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{\|\vec{x}\|^2} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{x} = \vec{x}_B - \vec{x}_A \quad \|\vec{x}\| = r \quad (4.3)$$

(vedi figura 4.2).

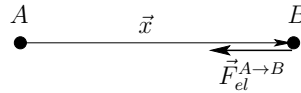


Figura 4.2: Forza elettrostatica tra due PM A e B carichi elettricamente nel caso di una forza attrattiva.

Se ora consideriamo un PM di carica q sottoposto alle forze $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ dovute a n PM di carica $q_1, \dots, q_n$, allora la forza totale agente su di esso è la *sovrapposizione lineare* delle forze

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i}{\|\vec{x}_i\|^3} \vec{x}_i$$

cosa che possiamo riscrivere come

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\|\vec{x}_i\|^3} \vec{x}_i \quad (4.4)$$

dove, se abbiamo scelto l'origine O in corrispondenza del PM di carica q , i vettori $\vec{x}_i$ sono i vettori posizione dei n PM (vedi figura 4.3).

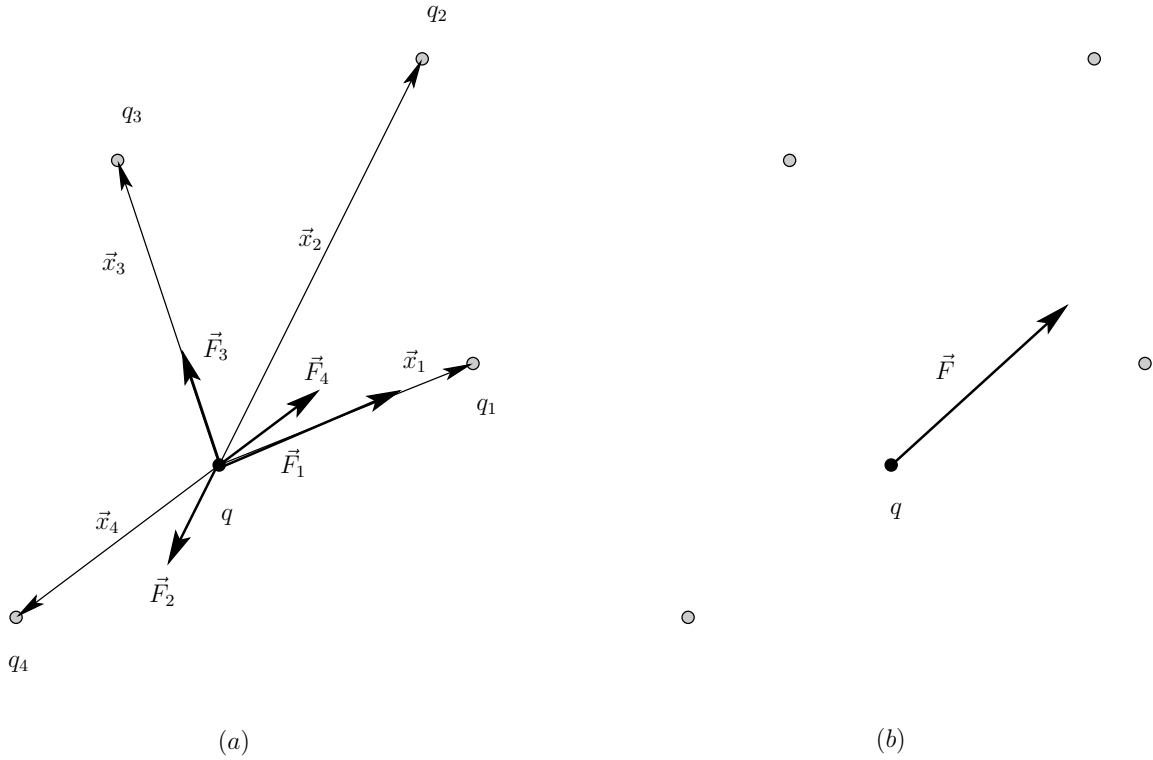


Figura 4.3: (a) Forza elettrostatica subita dal PM di carica elettrica q da quattro PM carichi elettricamente. (b) Risultante delle forze $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$.

Per concludere questa sezione va osservato che per un guscio sferico di raggio R e di carica uniforme, la forza da esso esercitata su una particella carica ad una distanza $d > R$ è identica alla forza che si otterrebbe se tutta la carica elettrica fosse concentrata al centro del guscio.

Da un punto di vista epistemologico è importante notare che la forza elettrostatica formulata nella legge di Coulomb è una *forza a distanza*, ossia una forza tra due corpi che non sono a contatto. Questo concetto, come vedremo, lascerà il posto al concetto più centrale di campo, che permette di sormontare le difficoltà contenute in una formulazione in termini di forze a distanza: infatti una forza a distanza equivale ad un'*azione istantanea*, cosa che è in disaccordo con il principio di causalità della relatività di Einstein².

²Infatti, visto che il tempo non interviene nella legge di Coulomb, una modifica della posizione relativa dei due PM carichi implica una modifica istantanea dell'interazione.

4.4 Il campo elettrico

4.4.1 Definizione

Benché ciò che si misura sia in definitiva una forza, risulta utile introdurre un nuovo concetto, derivato da quello di forza, cioè quello di campo elettrico dovuto ad una certa configurazione di cariche. Vogliamo quindi rimpiazzare l'effetto di una distribuzione di cariche su una carica q data con qualcosa che è legato unicamente al punto $\vec{x}$ in cui si trova la carica q .

Il campo elettrico può essere definito come la forza agente sull'unità di carica positiva in un determinato punto dello spazio: è una funzione vettoriale del posto, notata $\vec{E}$. La sua definizione richiede però qualche cautela: non è necessariamente la forza che si misurerebbe caricando con una unità di carica una pallina e portandola nella posizione desiderata. La ragione è che una unità di carica può essere così grande che la sua presenza alteri sensibilmente la configurazione preesistente delle cariche sorgenti del campo. Per questa ragione bisogna usare un procedimento di passaggio al limite, nel quale si determina il rapporto fra la forza agente sul piccolo corpo di prova e la sua carica elettrica per cariche progressivamente più piccole. Sperimentalmente si trova che questo rapporto e la direzione della forza tendono a diventare costanti man mano che la quantità di carica diventa più piccola. I valori limite di tale rapporto e di tale direzione definiscono la grandezza e la direzione del **campo elettrico** $\vec{E}$ nel punto considerato. In simboli possiamo scrivere

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}^{\rightarrow q}}{q} \quad (4.5)$$

dove $\vec{F}_{el}^{\rightarrow q}$ è la forza elettrostatica che agisce sulla carica q . Naturalmente si ammette che la carica q sia posta in un certo punto $\vec{x}$ e che la forza ed il campo elettrico siano misurati in quel punto.

In generale scriveremo semplicemente³

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q} . \quad (4.6)$$

Per esempio il campo elettrico generato da una carica puntiforme, anche detto **campo elettrico coulombiano**, è dato da

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}$$

dove abbiamo scelto l'origine O nella posizione della carica q e $\vec{x}$ corrisponde al vettore posizione del punto in cui si vuole determinare il campo elettrico (vedi figura 4.4).

Scrivendo l'equazione (4.6) come

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} . \quad (4.7)$$

Vediamo che per determinare la forza elettrostatica subita da una particella di carica q abbiamo eliminato la distribuzione di carica in favore di una proprietà dello spazio nel

³La confusione con la notazione $\vec{F}_{el}$ per la forza elastica è da evitare.

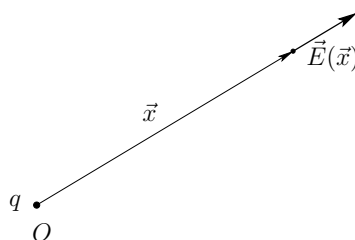


Figura 4.4: Campo elettrico in $\vec{x}$ nel caso di una carica $q > 0$.

punto in cui si trova la carica, ossia il campo elettrico.

Beninteso, se la distribuzione di carica sparisce anche il campo elettrico scompare: come vedremo, in generale, la carica elettrica è la sorgente del campo elettrico. Ciò che però è fondamentale osservare è che, con l'introduzione del campo elettrico, sono le proprietà dello spazio a determinare la forza sulla carica q e che queste proprietà non sono in corrispondenza biunivoca con le possibili distribuzioni di carica: è possibile avere più distribuzioni di carica che generano lo stesso campo elettrico in un punto dato.

Osserviamo che, dalla definizione data, il campo elettrico $\vec{E}$ prodotto da n punti materiali è la somma dei N campi elettrici $\vec{E}_i$ prodotti dai singoli punti materiali: $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$, si parla di **principio di sovrapposizione lineare**.

Come abbiamo detto nell'introduzione, l'elettrostatica si occupa di problemi in cui le cariche elettriche sono immobili: questo conferisce al campo elettrico la proprietà di essere indipendente dal tempo, si parla di campo elettrico statico. Ciò nonostante, da un punto di vista meccanico, utilizzando le leggi di Newton possiamo studiare la dinamica di una particella in un campo elettrico statico senza necessariamente imporre al punto materiale di essere fermo, in tal caso possiamo utilizzare la legge (4.7) anche se il punto materiale di carica elettrica q si muove, ciò che è essenziale è invece che le cariche elettriche che stanno all'origine del campo elettrico $\vec{E}$ siano immobili.

4.4.2 Rappresentazione del campo: linee di forza

Abbiamo definito il vettore campo elettrico $\vec{E}$ per mezzo della forza che è subita da una carica. Ora vogliamo parlare del campo elettrico in un punto, anche quando non ci sono cariche. Intendiamo in effetti affermare che, dato che ci sono delle forze che “agiscono sulla” carica, deve esistere tuttavia “qualcosa” anche quando la carica è rimossa. Se una carica posta nel punto $\vec{x}$ al tempo t subisce la forza $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$, noi associamo il vettore $\vec{E}$ al punto $\vec{x}$ dello spazio. Possiamo pensare che $\vec{E}(\vec{x}, t)$ dia la forza che sarebbe risentita al tempo t da una carica unitaria posta in $\vec{x}$, con la condizione che la carica ivi posta non disturbi le posizioni o i moti di tutte le altre cariche che producono i campi.

Seguendo quest'idea, associamo a ogni punto $\vec{x}$ dello spazio il vettore $\vec{E}$ che, in generale, può variare col tempo. Il campo elettrico è perciò considerato come funzione vettoriale

di x , y , z e t . Dato che ogni vettore è specificato mediante le sue componenti, il campo $\vec{E}(\vec{x}, t)$ rappresenta tre funzioni matematiche di $(\vec{x}, t)$.

Si sono escogitati vari modi per aiutare la mente a visualizzare il comportamento dei campi. Il più concreto è anche il più astratto e consiste semplicemente nel considerare i campi come funzioni matematiche del punto e del tempo. Possiamo anche provare a farci un quadro mentale del campo disegnando in vari punti dello spazio dei vettori ciascuno dei quali dà l'intensità e la direzione del campo in quei punti (vedi figura 4.5).

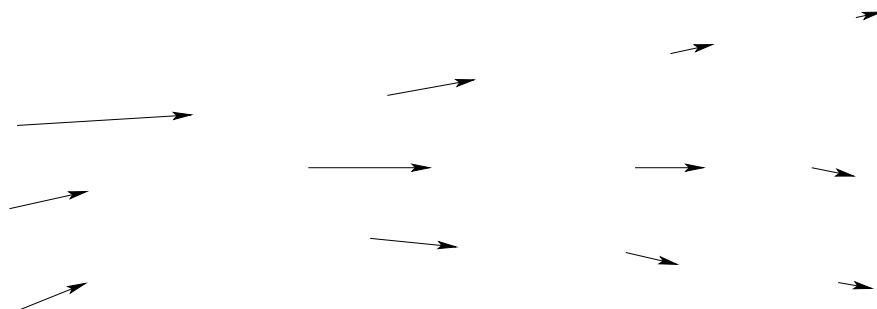


Figura 4.5: Il campo elettrico può essere rappresentato tracciando un sistema di frecce le cui lunghezze e direzioni indicano i valori del campo nei punti dai quali hanno origine le frecce.

Possiamo tuttavia far di più e disegnare delle linee che sono ovunque tangenti ai vettori, le quali per così dire seguono le frecce e registrano la direzione del campo. Così facendo perdiamo di vista la lunghezza del vettore, ma possiamo tener conto dell'intensità del campo disegnando le linee molto distanziate quando il campo è debole e molto vicine quando il campo è forte (vedi figura 4.6).

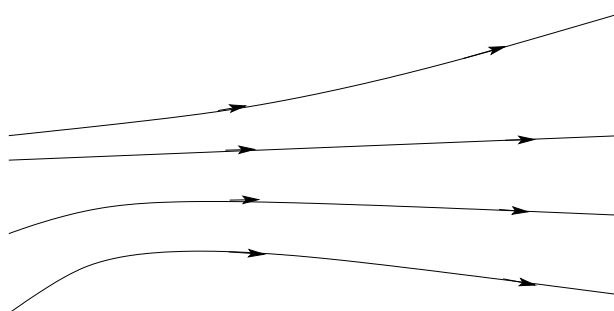


Figura 4.6: Il campo elettrico può essere rappresentato tracciando delle linee che sono tangenti alla direzione del campo elettrico in ogni punto e ponendo la densità di queste linee proporzionali all'intensità del campo.

Si adotta la convenzione che il *numero di linee per unità di superficie* normale alle linee stesse deve essere direttamente proporzionale all'*intensità del campo*. Queste linee sono chiamate **linee di forza del campo** e danno una rappresentazione chiara ed interessante del campo. Quanto detto per il campo elettrico vale anche per altri campi,

in particolare per il campo magnetico.

Per il campo elettrico le linee di forza “escono” dalle cariche positive ed “entrano” in quelle negative, come è possibile dedurre dalla definizione: infatti se q è una carica di prova positiva, $\vec{F}_{el}$ ed $\vec{E}$ hanno lo stesso verso e, considerato che cariche di stesso segno si respingono e di segno opposto di attraggono, è possibile stabilire la regola citata. Nella figura 4.7 riportiamo le linee di forza del campo elettrico coulombiano, in cui le linee di forza sono radiali.

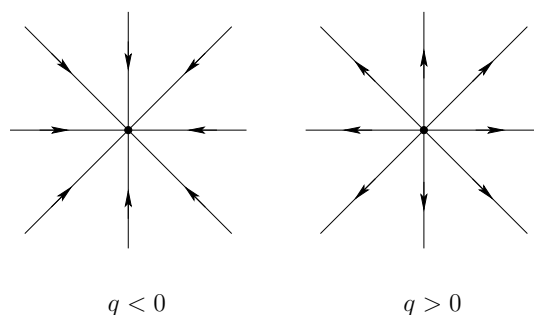


Figura 4.7: Linee di forza del campo elettrico coulombiano. Nel caso di una carica positiva le linee di forza “escono” dalla carica, mentre, nel caso di una carica negativa le linee di forza “entrano” nella carica. Chiaramente la simmetria è sferica.

4.4.3 Dalla forza a distanza al campo

Definendo la forza di Coulomb abbiamo notato che essa è una forza a distanza e che implica quindi un’azione istantanea da un corpo sull’altro, in questa sezione abbiamo invece introdotto una nuova entità fisica: il campo elettrico. Vediamo ora come va interpretata l’interazione elettrica con questa nuova entità e come quest’ultima permette di eliminare l’azione istantanea a distanza.

Invece di parlare di forza a distanza tra particelle, è possibile descrivere questa interazione introducendo il concetto di campo elettrico. Al posto di dire che una particella esercita un’azione su un’altra particella, si può dire che essa crea un campo elettrico attorno a sé, ogni altra particella che si trova in questo campo sarà sottomessa ad una certa forza. In meccanica newtoniana, la nozione di campo costituisce unicamente un procedimento di descrizione di un fenomeno fisico di mutua interazione tra particelle; la teoria della relatività modifica radicalmente questo approccio. Poiché la *velocità di propagazione delle interazioni* è *finita*, le forze che sono esercitate ad un dato istante su una particella non possono dipendere dalla posizione delle altre particelle all’istante considerato. Il cambiamento di posizione di una particella si fa sentire sulle altre *solo* dopo un certo tempo. Questo significa che il campo si presenta qui come un’entità fisica reale. Non è possibile parlare di interazione diretta tra particelle che si trovano ad una certa distanza l’una dalle altre. L’interazione può prodursi unicamente ad ogni istante da un punto dello spazio ad un punto infinitamente vicino, ecco che il campo elettrico agisce quale entità fisica intermediaria: bisogna parlare di interazione di una particella con il campo e

dell'ulteriore interazione del campo con un'altra particella, *il campo elettrico diventa l'entità fisica che media la forza elettrica*.

4.4.4 Alcuni esempi di campo elettrico

Carica puntiforme

Nel caso di una carica puntiforme q , posta all'origine, il campo elettrico in $\vec{x}$ è ottenuto direttamente dalla definizione. Sia q_0 la carica di prova, allora

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{q_0} \vec{F}_{el}^{\rightarrow q_0} = \frac{1}{q_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{\|\vec{x}\|^2} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{x}\|^2} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$

Come si nota dalla legge ottenuta, il campo elettrico è “uscente” nel caso di $q > 0$ e “entrante” nel caso $q < 0$.

Placca conduttrice e condensatore piano

Il campo elettrico generato da una distribuzione di carica superficiale su di un piano infinitamente grande di densità superficiale di carica σ è per ragioni di simmetria perpendicolare al piano. L'intensità del campo elettrico vale

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

e il suo valore non dipende dalla distanza dal piano. Il verso è diretto verso il piano nel caso di una densità superficiale negativa ($\sigma < 0$) e nel verso opposto nel caso di una densità superficiale positiva ($\sigma > 0$).

Nel caso di un cosiddetto **condensatore piano**, ossia un sistema di due piani (idealmente infiniti) uno caricato positivamente ($+\sigma$) e l'altro caricato negativamente ($-\sigma$), il campo elettrico è nullo salvo tra i due piani.

In questo caso utilizzando il principio di sovrapposizione lineare si ottiene un campo uniforme tra i piani

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

come nella figura 4.8

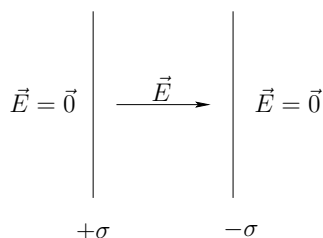


Figura 4.8: Campo elettrico di un condensatore piano.

4.5 Energia e potenziale elettrico

La forza elettrostatica è una forza conservativa, questo ci permette di associare alla forza elettrostatica $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ un'energia potenziale E_{el}^{pot} , tale che il lavoro svolto dalla forza elettrostatica vale

$$W_{el} = -\Delta E_{el}^{pot}.$$

Da notare che nel teorema dell'energia meccanica (vedi capitolo di Meccanica) l'energia potenziale qui introdotta va considerata come una forma di energia meccanica.

Si introduce pure il concetto di **potenziale elettrico**, notato φ , che indica l'energia potenziale per unità di carica, ossia

$$\varphi = \frac{E_{el}^{pot}}{q} \quad \Longleftrightarrow \quad E_{el}^{pot} = q\varphi.$$

esattamente come il campo elettrico indica la forza per unità di carica. Il potenziale elettrico ha quindi lo stesso ruolo dell'energia potenziale per il vettore campo elettrico, invece del vettore forza elettrostatica.

Da notare che il lavoro per unità di carica coincide con $-\Delta\varphi$ e la quantità $\Delta\varphi$ è chiamata **differenza di potenziale elettrico** associata al campo elettrico $\vec{E}$.

Carica puntiforme

Nel caso di una carica puntiforme $\tilde{q}$, posta all'origine, l'energia potenziale elettrica di una carica q posta in $\vec{x}$ è data da

$$E_{el}^{pot}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tilde{q}q}{\|\vec{x}\|} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tilde{q}}{\|\vec{x}\|}.$$

Campo elettrico costante

Un caso particolarmente importante è quello di un campo elettrico costante, in tal caso anche la forza elettrostatica

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$$

è costante e utilizzando il risultato (3.27) otteniamo immediatamente che l'energia potenziale è data da

$$E_{el}^{pot}(\vec{x}) = -q\vec{E} \cdot \vec{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = -\vec{E} \cdot \vec{x}.$$

4.6 Corrente elettrica

Nelle sezioni precedenti abbiamo considerato il caso in cui le cariche elettriche sono a riposo, e abbiamo studiato l'elettrostatica. In questa sezione invece parleremo di cariche elettriche in moto, ossia di corrente elettrica.

Se consideriamo un corpo conduttore isolato non si osserva nessun spostamento di carica elettrica, all'interno del conduttore il campo elettrico è nullo e in tutti i punti del conduttore il potenziale elettrostatico è uguale. Vi sono però delle situazioni in cui in un corpo conduttore possono fluire cariche elettriche, ciò che non avviene per i corpi isolanti, infatti quest'ultimi non hanno elettroni liberi. Per ottenere un flusso di cariche è necessario avere un campo elettrico non nullo che generi una forza su di esse e quindi il loro movimento. Una carica positiva in un punto dato scorrerà nella direzione del campo elettrico $\vec{E}$ in quel punto, per descrivere questo flusso introduciamo il concetto di **densità di corrente elettrica**, grandezza vettoriale notata $\vec{j}$, con verso e direzione uguale al campo elettrico e la cui intensità j indica la quantità di carica che attraversa una superficie unitaria di vettore normale $\vec{E}/\|\vec{E}\|$, per unità di tempo. In questo contesto consideriamo unicamente il caso in cui il flusso di carica è costante e indichiamo con I la carica che attraversa una superficie data per unità di tempo. I è chiamata **corrente elettrica**.

Un caso particolarmente interessante è quello in cui si considera un conduttore filiforme, sia S la sua sezione e ℓ la sua lunghezza. Il campo elettrico è illustrato nella figura 4.9.

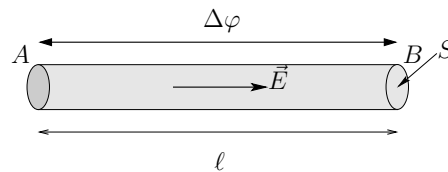


Figura 4.9: Conduttore filiforme di lunghezza ℓ e sezione S . Il campo elettrico $\vec{E}$, al quale è associata una differenza di potenziale $\Delta\varphi$ genera la corrente elettrica.

Al campo elettrico $\vec{E}$ è associata una differenza di potenziale $\Delta\varphi$ e si noti che la corrente elettrica fluisce sempre dal punto a potenziale maggiore verso il punto con un valore minore del potenziale.

Sperimentalmente si osserva che in molti casi l'intensità della corrente elettrica I che fluisce nel conduttore è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale $\Delta\varphi$ dove la costante di proporzionalità, che dipende dalla geometria del conduttore e dal materiale, è chiamata **resistenza elettrica** R , si ottiene così la **legge di Ohm**

$$\Delta\varphi = RI. \quad (4.8)$$